

Descriptions linéaires de polytopes associés aux antimatroïdes

Faculté des Sciences

Département de Mathématique

Année académique 2012 - 2013

Promoteur : **Jean-Paul Doignon**

Mémoire de fin d'études présenté
par **Keno Merckx**
en vue de l'obtention du grade de
Master en Sciences Mathématiques

*“Une solution qui vous démolit vaut mieux
que n’importe quelle incertitude.”*

-Boris Vian, L’herbe rouge

Remerciements

Avant tout, je voudrais adresser mes plus sincères remerciements à mon promoteur, Jean-Paul Doignon. Premièrement pour m'avoir proposé un sujet marquant si bien les mathématiques combinatoires et la géométrie. Ensuite pour la qualité indiscutable de son encadrement et pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de ce mémoire.

J'aimerais également remercier les personnes qui m'ont accompagnées durant cette année, dans les bons moments comme dans les moins bons. D'une manière générale, j'en profite pour remercier l'ensemble de mes amis qui ont toujours été présents pour moi. En particulier, Jérémie, Julie et Partick, dont la motivation et la bonne humeur sont sources constantes d'inspiration.

Pour terminer, il va de soi que je ne serais pas arrivé ici aujourd'hui sans le soutien inconditionnel de mes parents et de ma soeur. Je les remercie du fond du coeur pour leur aide précieuse.

Table des matières

Introduction	5
1 Notions préliminaires	6
1.1 Ensembles partiellement ordonnés	6
1.2 Graphes	8
1.3 Polytopes convexes	8
2 Antimatroïdes et abstraction de la convexité	11
2.1 Introduction aux antimatroïdes	11
2.2 Quelques exemples d'antimatroïdes	15
2.3 Circuits	19
3 Polytopes d'antimatroïdes	24
3.1 Approche géométrique	24
3.2 Polytope d'antimatroïdes d'ordre	27
3.3 Polytope d'antimatroïdes d'ordre double	31
3.4 Polytope d'antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes	33
3.5 Polytope d'antimatroïdes d'élagage d'arbre par sommets	34
3.6 Motivation : les structures de connaissances	37
4 Enumération des antimatroïdes	41
4.1 Antimatroïdes sur trois éléments	41
4.2 Antimatroïdes sur quatre éléments	43
5 Nouveaux résultats sur les polytopes d'antimatroïdes	49
5.1 Antimatroïdes aux polytopes pyramidaux	49
5.2 Antimatroïdes d'ordre augmenté : aspect combinatoire	53
5.3 Antimatroïdes d'ordre augmenté : aspect géométrique	57

6 Conclusion	70
Appendice	72
Liste des antimatroïdes de \mathbb{A}_4^{iso}	72
Polytopes des faisables pour \mathbb{A}_4^{iso}	75

Introduction

Le but de ce mémoire est d'obtenir une description linéaire de polytopes associés aux antimatroïdes. Certains de ces polytopes ont été étudiés de façon implicite par divers auteurs dont Stanley [26], Gröflin [14] ou encore Liebling [20]. Ensuite, Korte et Lovász, qui se sont d'abord intéressés avec Schrader aux antimatroïdes en tant que greedoïdes particuliers [19], ont publié en 1985 un article [18] à propos de ces polytopes d'antimatroïdes. Celui-ci contient une synthèse des descriptions connues de ces polytopes et complète celle-ci par quelques résultats nouveaux. Cet article a constitué le point de départ de ce mémoire. La relecture de cet article paru il y a 28 ans a été motivée par des questions récentes sur des modèles probabilistes.

L'article de Korte et Lovász présente, entre autres, différentes familles d'antimatroïdes pour lesquelles une description linéaire du polytope associé est connue. Nous nous sommes alors posé la question de savoir s'il existait d'autres familles d'antimatroïdes dont nous pourrions donner une description linéaire de leurs polytopes. A cette fin, nous avons inspecté l'ensemble des antimatroïdes sur un, deux, trois et quatre éléments afin d'en extraire les antimatroïdes n'appartenant à aucune famille définie dans [18]. Suite à l'étude des exemples obtenus, nous avons défini deux nouvelles familles d'antimatroïdes et obtenu la description linéaire des polytopes associés aux antimatroïdes de ces familles.

Dans le premier chapitre de ce travail, nous rappelons rapidement les concepts de base utilisés dans ce mémoire. Le deuxième chapitre est consacré à la définition des antimatroïdes, ainsi qu'à plusieurs résultats standards les concernant. Le chapitre 3 fournit d'abord une motivation à l'étude des polytopes des faisables. Cette motivation provient de la théorie des structures de connaissances, où un problème de caractérisation de modèle conduit à la recherche de descriptions linéaires de ces polytopes. Cette motivation est suivie par la présentation d'une partie des résultats de l'article [18] de Korte et Lovász. Ensuite, dans le chapitre 4 nous listons et classons les antimatroïdes sur trois et quatre éléments, pris à isomorphisme près. Enfin, le chapitre 5 contient la définition et des résultats originaux sur deux nouvelles familles d'antimatroïdes.

Chapitre 1

Notions préliminaires

Nous introduisons dans ce premier chapitre quelques définitions et notions standards en mathématique que nous utiliserons par la suite. Ces notions sont basiques et nous nous permettons donc de passer rapidement sur celles-ci.

Les principaux ouvrages utilisés sont les livres de Schröder [24] et de Trotter [27] pour la théorie des ensembles ordonnés. Nous empruntons au livre de Diestel [3] les concepts de théorie des graphes dont nous aurons besoin. Enfin, nous utiliserons le livre de Grünbaum [15] ou encore celui de Ziegler [28] pour les notions de géométrie. Le lecteur est libre de se référer aux oeuvres ci-dessus pour de plus amples détails sur ces notions.

1.1 Ensembles partiellement ordonnés

Nous utiliserons les notations classiques de la théorie des ensembles. Ainsi, 2^E sera l'ensemble des parties de l'ensemble E . Le cardinal de E sera noté $|E|$. L'ensemble vide sera désigné par le symbole \emptyset . Le complément $E \setminus F$ d'un sous-ensemble F de E sera noté F^c .

Rappelons qu'une *relation binaire sur E* est un sous-ensemble $R \subseteq E \times E = \{(e, f) : e, f \in E\}$. Pour toute relation binaire nous écrivons $e R f$ si $(e, f) \in R$. Une relation binaire R sur E est dite

- *réflexive* si $e R e$ pour tout e dans E ,
- *irréflexive* si aucun e dans E ne satisfait $e R e$,
- *symétrique* si $e R f$ implique $f R e$ pour tout e, f dans E ,
- *antisymétrique* si $e R f$ et $f R e$ implique que $e = f$ pour tout e, f dans E ,
- *asymétrique* si $e R f$ implique $f R e$ soit faux pour tout e, f dans E ,
- *transitive* si $e R f$ et $f R g$ implique $e R g$ pour tout e, f, g dans E ,

Pour une relation binaire R sur un ensemble fini E , la *fermeture transitive* de R , notée R^t est définie par $e R^t f$ si et seulement si il existe une séquence e_1, \dots, e_n dans E telle que $e = e_1$, $f = e_n$ et $e_1 R e_2 R \dots R e_n$. Il est très facile de voir que le nom est justifié par le fait que la fermeture transitive d'une relation binaire est transitive.

Les *relations d'ordre* sont les relations binaires réflexives, antisymétriques et transitives. Celles-ci donnent lieu aux *ensembles partiellement ordonnés* qui sont définis comme les couples (E, R) avec E un ensemble et R une relation d'ordre sur E . Les ensembles partiellement ordonnés seront très souvent appelés simplement *ensembles ordonnés*, et lorsque aucune confusion n'est possible, nous noterons l'ensemble ordonné E plutôt que (E, R) pour alléger les notations. Nous utiliserons aussi la notion de *relation d'ordre stricte*, c'est-à-dire une relation binaire qui est irreflexive, asymétrique et transitive. De manière classique un ensemble ordonné sera fini (resp. infini) si l'ensemble P est fini (resp. infini). Dans ce travail nous ne manipulerons que des ensembles ordonnés finis.

Les relations d'ordre introduisent une hiérarchie sur leur ensemble. Par analogie avec les nombres naturels, nous noterons en général \leq une relation d'ordre sur l'ensemble E . Les conventions usuelles sont bien sûr d'application ainsi $e \geq f$ signifie $f \leq e$ et $e < f$ signifie $e \leq f$ et $e \neq f$.

Soit un ensemble ordonné (E, \leq) ; un élément $e \in E$ est minimal si $f \leq e$ implique $f = e$. De même, un élément $e \in E$ est maximal si $e \leq f$ implique $e = f$. La relation binaire \prec signifie $e < f$ et il n'existe aucun g tel que $e < g < f$. Cette relation est la *relation de couverture* de E . Elle permet entre autre de définir le couple (E, \prec) qui est appelé le *diagramme de Hasse*. Cette définition permet une visualisation rapide dans le plan \mathbb{R}^2 (que nous supposons muni d'un système de coordonnées cartésiennes standard) qui est la suivante :

1. Dessiner un point pour chaque élément de E dans le plan tel que si $e < f$, alors le point représentant f aura son ordonnée y plus grande que celle du point représentant e .
2. Tracer une ligne droite entre e et f si et seulement si $e \prec f$ de sorte que cette ligne ne comprenne aucun point autre que ceux représentant e et f .

Pour un ensemble ordonné (E, \leq) nous appellerons *idéal* un sous-ensemble $I \subseteq E$ tel que $e \in I$ et $f \leq e$ implique $f \in I$. Pour $X \subseteq E$ nous appellerons *idéal de X* l'ensemble $\{e \in E : \exists x \in X \text{ tel que } e \leq x\}$ dont la notation sera $\text{idl}(X)$. Nous appellerons *filtre* un sous-ensemble $F \subseteq E$ tel que $e \in F$ et $f \geq e$ implique $f \in F$. Pour $X \subseteq E$ nous appellerons *filtre de X* l'ensemble $\{e \in E : \exists x \in X \text{ tel que } x \leq e\}$ dont la notation sera $\text{flt}(X)$. Si l'ensemble X est un singleton $\{x\}$, nous nous permettrons un abus de notation et nous noterons $\text{idl}(x)$ et $\text{flt}(x)$ l'idéal et le filtre de $\{x\}$.

Nous dirons que deux éléments e et f de E sont *comparables* si $e \leq f$ ou $e \leq f$. Dans le cas contraire (ni $e \leq f$ ni $f \leq e$) nous dirons naturellement que e et f sont *incomparables*. Un sous-ensemble $X \subseteq E$ sera appelé une *chaîne* si tous ses éléments sont comparables deux à deux. De même, X sera appelé une *anti-chaîne* si tous ses éléments sont incomparables deux à deux.

1.2 Graphes

Rappelons à présent quelques définitions basiques de théorie des graphes. Un *graphe* $G = (V, E)$ consiste en un ensemble V de *sommets* et un ensemble E de paires d'éléments de V appelées *arêtes*. Notons que dans ce travail, nous ne considérerons que des *graphes finis*, c'est-à-dire des graphes dont l'ensemble des sommets est fini. Un *sous-graphe* $G' = (E', V')$ du graphe $G = (V, E)$ est un graphe tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$.

Une séquence alternée $v_1 e_1 \dots v_k e_k v_{k+1}$ de sommets et d'arêtes est un *chemin* si $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$, $e_{i-1} \cap e_i = \{v_i\}$ pour $2 \leq i \leq k$, $v_1 \in e_1$ et $v_{k+1} \in e_k$. Le nombre d'arêtes dans la séquence définira sa *longueur* (appelée aussi *taille*). Une séquence alternée $v_1 e_1 \dots v_k e_k v_{k+1}$ de sommets et d'arêtes est un *cycle* si $v_1 e_1 \dots v_k e_k$ est un chemin, $v_1 = v_{k+1}$ et $e_k = \{v_1, v_{k+1}\}$.

Un graphe est dit *connexe* si quels que soient les sommets u et v de celui-ci, il existe un chemin joignant u à v . Un graphe connexe et sans cycle sera appelé un *arbre*. Les *feuilles* d'un arbre seront ses sommets compris dans une seule arête. Un *sous-graphe couvrant* d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous-graphe $G' = (V', E')$ tel que $V = V'$ et $E' \subseteq E$. Si ce sous-graphe couvrant est un arbre, nous parlerons d'*arbre couvrant*.

Un graphe dirigé $D = (V, A)$ consiste en un ensemble de *sommets* V et un ensemble E de couples d'éléments de V appelés *arcs*, avec la propriété que si $(a, b) \in E$, alors $a \neq b$, pour éviter les boucles.

Donnons un exemple de graphe dirigé que nous utiliserons par la suite. Soit un ensemble ordonné (E, \leq) , le *graphe dirigé de couverture* associé à (E, \leq) , est le graphe $G = (E, A)$, où $(e_1, e_2) \in A$ si et seulement si $e_1 \prec e_2$ avec $e_1, e_2 \in E$.

1.3 Polytopes convexes

Encore une fois, les termes et notations utilisés sont des plus conventionnels. Nous supposons ici que le lecteur se sent confortable avec les espaces affins et certaines bases de géométrie élémentaire. Un sous-ensemble K de \mathbb{R}^n est dit *convexe* si pour tout $x, y \in K$, le segment $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : 0 \leq \lambda \leq 1\}$ est contenu dans K . De façon évidente,

l'intersection d'ensembles convexes est encore un ensemble convexe et \mathbb{R}^n est lui-même convexe. Pour tout ensemble $X \subseteq \mathbb{R}^n$, le plus petit (au sens de l'inclusion) ensemble convexe contenant X est appelé l'*enveloppe convexe* de X et est obtenu en prenant l'intersection de tous les convexes contenant X :

$$\text{conv}(X) = \bigcap \{K \subseteq \mathbb{R}^n : X \subseteq K, K \text{ est convexe}\}.$$

Cette définition nous donne que si $X = \{x_1, \dots, x_t\} \subseteq \mathbb{R}^n$ est fini, alors

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^t \lambda_i x_i : \lambda_1, \dots, \lambda_t \in \mathbb{R}_+, \sum_{i=1}^t \lambda_i = 1 \right\}.$$

Voici deux définitions équivalentes d'un polytope de \mathbb{R}^n . D'une part, un \mathcal{V} -polytope est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans \mathbb{R}^n . D'autre part, un \mathcal{H} -polytope est l'intersection bornée d'un nombre fini de demi-espaces fermés de \mathbb{R}^n . Naturellement, un polytope (convexe) est un ensemble de points $P \subseteq \mathbb{R}^n$ qui est un \mathcal{V} -polytope ou un \mathcal{H} -polytope et donc, les deux à la fois. Selon cette définition, un polytope est toujours convexe.

La *dimension* d'un polytope est la dimension de son enveloppe affine. Nous dirons qu'un polytope P de \mathbb{R}^n est *plein* si P est de dimension n . Par la suite nous supposons généralement que les polytopes considérés sont de dimension pleine.

De façon générale, soit K un ensemble convexe dans \mathbb{R}^n ; alors $F \subseteq K$ est une *face* de K si $F = \emptyset$, $F = K$ ou bien s'il existe un hyperplan H de support pour K (c.-à-d. est valide pour X et possédant un point commun avec la frontière de X) tel que $F = K \cap H$. Toute face de K qui n'est pas \emptyset ou K est appelée *face non triviale* de K . Toute face de K qui n'est pas K lui-même est appelée *face propre*. Pour un polytope de dimension pleine dans \mathbb{R}^n nous appellerons les faces de dimension 0, 1, $n - 2$ et $n - 1$ respectivement les *sommets*, les *arêtes*, les *crêtes* et les *facettes*. Un *hyperplan définissant une facette* (HDF) pour un polytope P est un hyperplan H valide tel que $P \cap H$ est une facette de P . Le demi-espace d'un tel hyperplan qui contient P est un *demi-espace définissant une facette* (DDF). Une *inégalité définissant une facette* (IDF) est une inégalité décrivant un DDF. Notons encore que toute face d'un polytope est encore un polytope. Nous désignerons l'intérieur du polytope P par $\text{int}(P)$.

Les références données en début de chapitre contiennent beaucoup de résultats sur les faces des polytopes. Nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 1.1. *Si $-1 \leq h < k \leq n - 1$ et si P est un polytope de dimension n , chaque face de dimension h est l'intersection d'une famille (contenant au moins $k - h + 1$*

membres) de faces de dimension k de P qui la contiennent.

Démonstration. Voir [15]. □

Nous aurons également besoin par la suite de la définition suivante. Soit un ensemble E . Le *vecteur caractéristique* d'un sous-ensemble F de E , est le point de \mathbb{R}^E défini par

$$\chi^F = \sum_{i \in Q} e_i,$$

où les e_i (pour i dans E) sont les vecteurs de la base canonique de \mathbb{R}^E .

Pour terminer, nous tenterons de donner un maximum d'exemples quand nous parlerons de polytopes. Ces exemples seront autant que possible accompagnés de schémas représentatifs. Pour les polytopes de dimension deux ou trois, ces schémas ne posent pas trop de souci. Par contre, pour représenter les polytopes de dimension quatre nous aurons besoin du concept suivant. Un *diagramme de Schlegel* d'un polytope sur une de ses facettes F est la projection centrale de l'ensemble de ses faces dans F à partir d'un point suffisamment proche de F .

Exemple 1. Voici en guise d'illustration, deux diagrammes de Schlegel. La Figure 1.1a représente un diagramme de Schlegel du tétraèdre, ce diagramme est à voir dans \mathbb{R}^2 . La Figure 1.1b représente un diagramme de Schlegel de l'hypercube $[0, 1]^4$ et donc ce diagramme est à voir dans \mathbb{R}^3 .

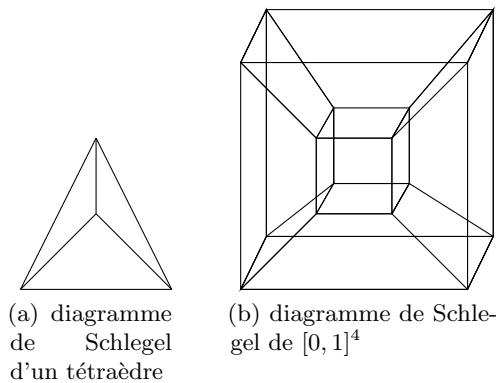


FIGURE 1.1 – Diagrammes de Schlegel

Chapitre 2

Antimatroïdes et abstraction de la convexité

Le premier but de ce chapitre est d'introduire la notion d'antimatroïde. Cette introduction requiert plusieurs concepts préliminaires que nous abordons dans la première section. Nous mettrons en évidence le lien entre les antimatroïdes et la convexité (usuelle) affine. Ensuite, nous passerons en revue une série d'exemples d'antimatroïdes pour offrir au lecteur des illustrations concrètes des notions abstraites définies précédemment. Pour finir, nous définirons les circuits d'antimatroïdes et donnerons quelques résultats à leur propos. L'ensemble de ce chapitre est principalement basé sur l'article d'Edelman et Jamison traitant des géométries convexes [9] et sur le chapitre 3 du livre de Korte, Lovász et Schrader traitant des greedoïdes [19].

2.1 Introduction aux antimatroïdes

Dans cette section nous allons voir comment une abstraction de la convexité affine mène au concept d'antimatroïde. D'un certain point de vue, cette abstraction de la convexité est parallèle à l'abstraction de la dépendance linéaire qui mène, elle, aux matroïdes. Dilworth [5] fut le premier à étudier des structures proches des antimatroïdes via la théorie des treillis. Il sera ensuite suivi par de nombreux autres auteurs, dont Edelman [8] et Jamison [16] qui se sont particulièrement intéressés à la vision convexe des antimatroïdes. Ensuite Korte et Lovász [17] ont étudié les antimatroïdes vus comme cas particuliers de greedoïdes.

Le nom "antimatroïde" vient du fait que ces objets sont étroitement liés à la propriété dite d'anti-échange, l'opposé dans un certain sens de la propriété d'échange des

matroïdes. Cela dit, nombreux sont ceux qui trouvent le nom d'antimatroïde barbare et peu adapté. Introduisons à présent quelques notions et propriétés utiles pour la définition des antimatroïdes. Soit E un ensemble fini et \mathcal{A} une collection de sous-ensembles de E avec les propriétés suivantes :

$$\emptyset \in \mathcal{A} \text{ et } E \in \mathcal{A}, \quad (2.1)$$

$$A \in \mathcal{A} \text{ et } B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}. \quad (2.2)$$

\mathcal{A} est appelé un *alignement* de X . Celui-ci donne lieu à l'opérateur suivant sur 2^E :

$$\tau(X) = \bigcap \{A : X \subseteq A \text{ et } A \in \mathcal{A}\}.$$

Nous observons que $\tau(X)$ est l'unique plus petit ensemble dans \mathcal{A} qui contient X . De plus, τ est un *opérateur de fermeture*, dans le sens qu'il vérifie les propriétés suivantes :

$$X \subseteq \tau(X), \quad (2.3)$$

$$X \subseteq Y \Rightarrow \tau(X) \subseteq \tau(Y), \quad (2.4)$$

$$\tau(\tau(X)) = \tau(X), \quad (2.5)$$

$$\tau(\emptyset) = \emptyset. \quad (2.6)$$

De plus, nous avons les égalités

$$\mathcal{A} = \{\tau(X) : X \in 2^E\} \quad (2.7)$$

$$= \{X \in 2^E : X = \tau(X)\}. \quad (2.8)$$

Les éléments de \mathcal{A} seront appelés les *sous-ensembles ensembles convexes* (ils sont parfois appelés les *sous-ensembles fermés*), ce que nous abrègerons en *convexe* la plupart du temps. Nous appellerons un ensemble E muni de l'opérateur de clôture τ une *géométrie convexe* si, pour tout $X \subseteq E$ l'axiome suivant est respecté :

$$\text{si } y, z \notin \tau(X), y \neq z \text{ et } z \in \tau(X \cup y), \text{ alors } y \notin \tau(X \cup z). \quad (2.9)$$

Notons que le nom de géométrie convexe est souvent contesté dans le sens où il est toujours un peu ambigu de dénommer un objet mathématique par le nom d'une discipline tout entière. Malheureusement, celui-ci est devenu plus ou moins standard dans le domaine et c'est pourquoi nous l'utiliserons quand même. L'axiome précédent est appelé *propriété d'anti-échange* en opposition à la propriété d'échange que respecte l'opérateur de clôture

dans le cas des matroïdes. Pour rappel, cette propriété souvent appelée propriété d'échange de Steinitz-MacLane nous dit que si nous avons un ensemble E , alors $\sigma : 2^E \rightarrow 2^E$ est un opérateur de fermeture d'un matroïde si et seulement si σ est bien un opérateur de fermeture et pour tout $X \subseteq E$ et tout $y, z \in E$ nous avons,

$$\text{si } z \notin \tau(X) \text{ et } z \in \tau(X \cup y), \text{ alors } y \in \tau(X \cup z). \quad (2.10)$$

Comme mentionné précédemment, la propriété d'anti-échange est une caractéristique fondamentale de l'enveloppe convexe dans un espace affine réel (alors que la propriété d'échange l'est pour l'enveloppe affine). Effectivement, dans le plan euclidien, pour deux points différents y et z hors de l'enveloppe convexe de X , si z est dans $\text{conv}(X \cup \{y\})$, alors y est hors de $\text{conv}(X \cup \{z\})$. Ceci est illustré dans le plan par la Figure 2.1. Notons qu'une géométrie convexe peut, soit être donnée sous la forme d'un couple (E, τ) , soit (E, \mathcal{A}) avec \mathcal{A} l'alignement dont provient τ .

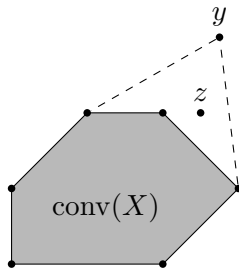


FIGURE 2.1 – Illustration de (2.9) dans le cas de la fermeture convexe.

Pour rester en cohérence avec le cas affine, nous appelons un élément x d'un sous-ensemble $A \subseteq E$ un *point extrême* de A si $x \notin \tau(A \setminus \{x\})$. L'ensemble des points extrêmes de A est noté $\text{ext}(A)$. Le théorème suivant nous fournit deux caractérisations assez intuitives des géométries convexes.

Théorème 2.1. *Soient $\tau : 2^E \rightarrow 2^E$ un opérateur de fermeture sur E et $\mathcal{A} = \{\tau(X) : X \in E\}$. Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (a) (E, \mathcal{A}) est une géométrie convexe.
- (b) Soit $A \subseteq E$ un convexe. Alors $A \cup y$ est convexe pour un certain $y \in E \setminus A$.
- (c) Pour tout convexe X de E , nous avons $X = \tau(\text{ext}(X))$.

Démonstration. (a) \Rightarrow (b). Supposons que $X \cup \{y\}$ n'est pas convexe pour tout $y \in E \setminus X$. Prenons un $y \in E \setminus X$ tel que $\tau(X \cup \{y\})$ est minimal. Soit $z \in \tau(X \cup \{y\}) \setminus (X \cup \{y\})$. Un tel z existe car $X \cup \{y\}$ n'est pas convexe par hypothèse. Alors $X \cup \{z\} \subseteq \tau(X \cup \{y\})$

implique $\tau(X \cup \{z\}) \subseteq \tau(X \cup \{y\})$. De plus, la propriété d'anti-échange nous donne que $y \notin \tau(X \cup \{z\})$ et donc il y a contradiction avec la minimalité de $\tau(X \cup \{y\})$.

(b) \Rightarrow (c). De façon évidente, si A est convexe, $\tau(\text{ext}(A)) \subseteq \tau(A) = A$. Supposons l'inclusion stricte et posons X comme étant un plus grand convexe contenant $\text{ext}(A)$ strictement inclus dans A . Par (b), il existe une suite e_1, \dots, e_k d'éléments de $E \setminus X$ telle que $X \cup \{e_1, \dots, e_i\}$ est convexe pour $i = 1, \dots, k$ et de plus $X \cup \{e_1, \dots, e_k\} = E$. Soit j le plus grand indice tel que $e_j \in A$; alors

$$A \cap (X \cup \{e_1, \dots, e_{j-1}\}) = A \setminus \{e_j\}$$

est convexe. Ceci implique $e_j \in \text{ext}(A)$, en contradiction avec $\text{ext}(A) \subseteq X$.

(c) \Rightarrow (a). Par l'absurde, supposons que $y, z \notin \tau(X)$, $y \neq z$, $z \in \tau(X \cup \{y\})$ et $y \in \tau(X \cup \{z\})$. Ainsi $y, z \notin \text{ext}(\tau(X \cup \{y, z\}))$. Par (c), nous avons

$$\tau(X \cup \{y, z\}) = \tau(\text{ext}(\tau(X \cup \{y, z\}))) \subseteq \tau(X).$$

Nous avons utilisé $\text{ext}(\tau(Y)) \subseteq Y$ pour $Y = X \cup \{y, z\}$. Ceci donne $y, z \in \tau(X)$, en contradiction avec nos hypothèses. \square

Nous sommes maintenant capables de définir formellement les antimatroïdes et d'exprimer le lien qu'ils entretiennent avec les géométries convexes définies ci-dessus. Soient un ensemble fini E et une collection non vide $\mathcal{F} \subseteq 2^E$. Nous définissons (E, \mathcal{F}) comme étant un *antimatroïde* s'il vérifie les deux conditions suivantes :

$$\mathcal{F} \text{ est clos par réunion,} \tag{AM1}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset, \exists f \in F \text{ tel que } F \setminus \{f\} \in \mathcal{F}. \tag{AM2}$$

La deuxième condition sera souvent appelée condition d'*accessibilité*. Les éléments de cet ensemble \mathcal{F} seront appelés les *faisables*. Nous dirons qu'un antimatroïde (E, \mathcal{F}) est *normal* si chaque élément de E apparaît dans au moins un faisable de \mathcal{F} . Sauf mention du contraire, dans la suite de ce travail, nous ne considérerons que des antimatroïde normaux (en particulier la normalité implique que $E \in \mathcal{F}$ par (AM1)). Notons que, comme les faisables sont clos sous l'union, l'ensemble de leurs compléments $\mathcal{A} = \{E \setminus F : F \in \mathcal{F}\}$ est clos sous l'intersection ce qui induit une opération de fermeture. De cette définition découle directement la proposition suivante :

Proposition 2.2. *(E, \mathcal{F}) est un antimatroïde si et seulement si (E, \mathcal{A}) est une géométrie convexe.*

Démonstration. De façon évidente, si nous avons un antimatroïde (E, \mathcal{F}) , l'ensemble \mathcal{A} des compléments de ses faisables vérifie le point (b) du théorème 2.1. Ceci implique que (E, \mathcal{A}) forme une géométrie convexe. Par un raisonnement inverse, si nous avons une géométrie convexe (E, \mathcal{A}) , l'ensemble \mathcal{F} des compléments des ensembles convexes forme un antimatroïde, à nouveau en raison du théorème 2.1. \square

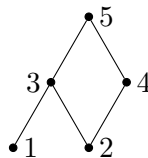
Il est donc équivalent d'étudier les antimatroïdes ou les géométries convexes. Notons qu'il existe encore quelques conflits de terminologie concernant ces deux objets. Dans ce travail nous parlerons bien antimatroïdes pour un couple (E, \mathcal{F}) où \mathcal{F} est l'ensemble des faisables et vérifie bien AM1 et AM2. En accord avec la proposition précédente, nous parlerons d'ensembles convexes d'un antimatroïde (ou simplement de convexe) pour tout A dans 2^E tel que A^c est dans \mathcal{F} . Ce choix est similaire au choix fait dans [19] mais il n'est pas standard, certains auteurs permutent parfois les définitions d'antimatroïde et de géométrie convexe.

2.2 Quelques exemples d'antimatroïdes

Nous allons à présent donner quelques exemples classiques d'objets mathématiques donnant lieu à des antimatroïdes. Nous prenons le point de vue des ensembles faisables et donnons en complément la vision convexe. Nous laissons au lecteur dans la plupart des cas le soin de vérifier que les exemples cités ci-dessous vérifient bien les conditions de base qui définissent les antimatroïdes. De plus, nous illustrons chaque cas en donnant explicitement un antimatroïde et sa représentation usuelle.

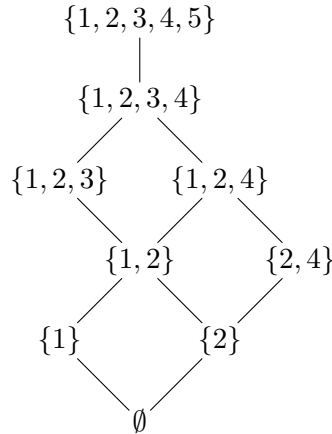
Exemple 2 (antimatroïde d'ordre). Soit un ensemble ordonné (E, \leq) . Si nous prenons comme ensemble \mathcal{F} de faisables l'ensemble des idéaux de E , alors (E, \mathcal{F}) est un antimatroïde. Les convexes sont alors les filtres de E . Il est facile de constater que les ensembles convexes d'un antimatroïde d'ordre sont, tout comme ses faisables, clos par réunion. En fait, cette propriété caractérise les antimatroïdes d'ordre, nous laissons au lecteur intéressé la démonstration de celle-ci.

Pour représenter les antimatroïdes d'ordre, il suffit de donner le diagramme de Hasse de l'ordre sur lequel se base l'antimatroïde. En voici un exemple :



Pour l'ordre représenté par ce dessin, nous avons l'antimatroïde $(\{1, 2, 3, 4, 5\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

Pour une meilleure visualisation, nous dessinons la collection des faisables :

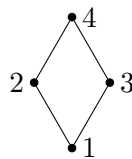


Exemple 3 (antimatroïde d'ordre double). Soit un ordre (E, \leq) . Si nous prenons comme ensemble de faisables l'ensemble suivant :

$$\mathcal{F} = \{X \cup Y \subseteq E : X \text{ est un idéal et } Y \text{ est un filtre de } E\},$$

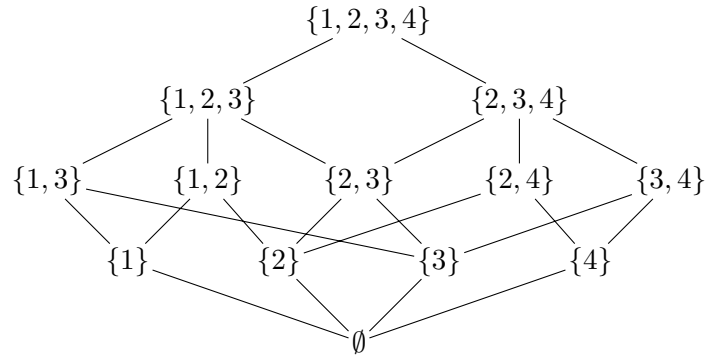
alors (E, \mathcal{F}) est un antimatroïde. Les convexes sont les ensembles A d'éléments de E qui vérifient le fait que pour tout a_1, a_2 dans A nous avons que $a_1 \leq e \leq a_2$ implique $e \in A$. Ceci illustre bien le lien qui existe avec la définition classique de la convexité dans un ensemble ordonné.

Comme pour l'exemple précédent, nous représentons les antimatroïdes d'ordre double par le diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné sous-jacent.



Le dessin ci-dessus nous donne l'antimatroïde d'ordre double $(\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = 2^{\{1, 2, 3, 4\}} \setminus \{\{2\}, \{3\}, \{2, 3\}\}$.

Pour une meilleure visualisation, nous dessinons la collection des convexes cette fois-ci :

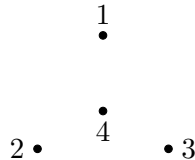


Exemple 4 (antimatroïde affin). Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fini de points. Si nous prenons comme collection d'ensembles faisables

$$\mathcal{F} = \left\{ X \in 2^E : X^c = \text{conv}(X^c) \cap E \right\},$$

alors (E, \mathcal{F}) est un antimatroïde. De par sa définition via l'enveloppe convexe, la vision avec les ensembles faisables est un peu contre-intuitive. Pour les antimatroïdes affins, les ensembles convexes sont les ensembles de points de E tels que leur enveloppe convexe ne contient pas d'autres points de E . Autrement dit, ce sont les traces sur E des ensembles convexes de \mathbb{R}^n .

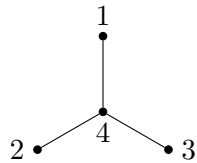
Observons un cas concret d'un antimatroïde affin dans \mathbb{R}^2 . Dans le plan, les antimatroïdes affins sont facilement représentables par un ensemble de points comme illustré ci-dessous.



Ce dessin traduit le fait que nous avons un antimatroïde $(\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = 2^{\{1, 2, 3, 4\}} \setminus \{\{4\}\}$.

Exemple 5 (antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets). Soit un arbre $T = (V, S)$. Pour définir un antimatroïde sur l'ensemble V , prenons comme faisables les ensembles de sommets dont le complément dans T nous donne un sous-arbre (en termes de sommets). Les ensembles convexes de cet antimatroïde sont les ensembles composés des sommets des sous-arbres de T . Pour avoir un lien avec la définition classique de la convexité, ils peuvent être vus comme les ensembles $A \in 2^V$ qui vérifient le fait que pour tout a_1, a_2 dans A nous avons que tous les sommets sur le chemin entre a_1 et a_2 sont compris dans A .

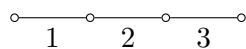
Sans grande surprise, nous représentons les antimatroïdes d'élagage d'arbre par sommets par l'arbre sous-jacent, comme illustré ci-dessous.



L'arbre du dessin nous donne l'antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets $(\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F})$ avec $\mathcal{F} = 2^{\{1,2,3,4\}} \setminus \{\{4\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}\}$.

Exemple 6 (antimatroïde d'élagage d'arbre par arêtes). Soit un arbre $T = (V, S)$. Cette fois, nous formons un antimatroïde sur l'ensemble S avec comme faisables les ensembles d'arêtes dont le complément dans T nous donne un sous-arbre (en termes d'arêtes). Les ensembles convexes de cet antimatroïde sont les ensembles composés des arêtes des sous-arbres de T . Pour avoir un lien avec la définition classique de la convexité, ils peuvent être vus comme les ensembles $A \in 2^S$ qui vérifient le fait que pour tout a_1, a_2 dans A nous avons que toutes les arêtes sur le chemin entre l'arête a_1 et l'arête a_2 sont comprises dans A .

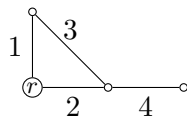
Comme pour l'exemple précédent, nous représentons les antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes en dessinant l'arbre sous-jacent.



Le dessin ci-dessus nous donne l'antimatroïde d'élagage d'arbre par arêtes $(\{1, 2, 3\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = 2^{\{1,2,3\}} \setminus \{\{2\}\}$.

Exemple 7 (antimatroïde de recherche par arête). Soient un graphe connexe $G = (V, S)$ et $r \in V$. Nous pouvons alors définir un antimatroïde sur S avec comme ensembles faisables les ensembles d'arêtes qui forment un sous-graphe connexe contenant r . Il est également possible de définir des antimatroïdes de façon similaire en se basant sur des graphes dirigés.

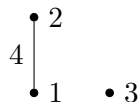
Pour représenter les antimatroïdes de recherche par arête, il suffit de donner le graphe sur lequel se base l'antimatroïde, en spécifiant le sommet r . Par exemple, le graphe :



nous donne l'antimatroïde de recherche par arête $(\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = 2^{\{1,2,3,4\}} \setminus \{\{3\}, \{4\}, \{3, 4\}, \{1, 4\}\}$.

Exemple 8 (antimatroïde de recherche par sommet-arête). Soit un graphe $G = (V, S)$. Si nous prenons comme ensemble $E = V \cup S$ et comme ensemble de faisables \mathcal{F} la collection des sous-ensembles $X \subseteq E$ tels que si une arête $[v_1, v_2] \in X \cap S$, alors $v_1 \in X$ ou $v_2 \in X$. Alors (E, \mathcal{F}) est un antimatroïde.

Encore une fois, les antimatroïdes de recherche par sommet-arête sont représentés par des graphes.



Le dessin ci-dessus donne l'antimatroïde de recherche par sommet-arête $(\{1, 2, 3, 4\}, \mathcal{F})$, avec $\mathcal{F} = 2^{\{1,2,3,4\}} \setminus \{\{4\}\}$.

2.3 Circuits

Soient (E, \mathcal{F}) un antimatroïde et $X \subseteq E$, nous définirons la *trace* de (E, \mathcal{F}) sur X par

$$\text{Tr}(\mathcal{F}, X) = \{F \cap X : F \in \mathcal{F}\}.$$

Il est facile de montrer la proposition suivante :

Proposition 2.3. *Soit (E, \mathcal{F}) un antimatroïde, alors $(X, \text{Tr}(\mathcal{F}, X))$ est aussi un antimatroïde.*

Démonstration. Assurons d'abord que les ensembles de $\text{Tr}(\mathcal{F}, X)$ vérifient la stabilité par réunion. Soit $K_1, K_2 \in \text{Tr}(\mathcal{F}, X)$, alors $K_1 \cup K_2$ peut s'écrire comme $(F_1 \cap X) \cup (F_2 \cap X)$, pour certains F_1 et F_2 dans \mathcal{F} . Par distributivité, cette union donne $K_1 \cup K_2 = (F_1 \cup F_2) \cap X = F_3 \cap X$ pour un certain $F_3 \in \mathcal{F}$. Par le fait que (E, \mathcal{F}) est un antimatroïde, nous avons bien que $K_1 \cup K_2 \in \text{Tr}(\mathcal{F}, X)$.

Ensuite, vérifions l'accessibilité. Soit $X \cap F \in \text{Tr}(\mathcal{F}, X)$ non vide, comme $F \in \mathcal{F}$, il existe une suite $f_1, \dots, f_{|F|}$ telle que pour tout i compris entre 1 et $|F|$ nous avons $F \setminus \{f_1, \dots, f_i\} \in \mathcal{F}$. Soit j le plus petit indice tel que $f_j \in X$. Alors $(F \setminus \{f_1, \dots, f_j\}) \cap X = (F \cap X) \setminus \{f_j\}$. Ceci nous montre qu'il existe bien un élément f_j tel que $(F \cap X) \setminus \{f_j\}$ appartient à $\text{Tr}(\mathcal{F}, X)$. \square

Poursuivons avec quelques définitions supplémentaires, nous dirons qu'un ensemble $X \subseteq E$ est *libre* si $\text{Tr}(\mathcal{F}, X) = 2^X$. Nous appellerons *circuit*, un ensemble $C \subseteq E$ qui est non libre minimal, c'est-à-dire que C n'est pas libre, mais que tous ses sous-ensembles propres le sont.

Exemple 9. Pour illustrer les notions définies ci-dessus, regardons l'antimatroïde (E, \mathcal{F}) avec $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\}\}$. Alors nous avons que ses ensembles libres sont : $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}$. Et ses circuits sont : $\{1, 3\}, \{1, 4\}$.

Ensuite, pour un ensemble $F \in \mathcal{F}$, nous définissons la *continuation faisable* de F par

$$\Gamma(F) := \{x \in E \setminus F : F \cup x \in \mathcal{F}\}.$$

D'un point de vue géométrie convexe, $\Gamma(F)$ est l'ensemble des points extrêmes du complément de F dans E . En d'autres termes, $\Gamma(F) = \text{ext}(E \setminus F)$.

Exemple 10. Si nous reprenons l'antimatroïde de l'Exemple 9, nous avons par exemple que $\Gamma(\{1\}) = \{2, 3\}$, parce que $\{1, 2\}$ et $\{1, 3\}$ sont des faisables mais pas $\{1, 4\}$. De même, nous avons aussi que $\Gamma(\{1, 2\}) = \{3, 4\}$.

Les circuits jouent un grand rôle dans l'étude des antimatroïdes et nous allons en donner une caractérisation plus facile à manipuler, mais avant cela, il nous faut démontrer deux lemmes. Définissons pour un antimatroïde (E, \mathcal{F}) l'*intérieur* d'un sous-ensemble X de E comme étant le plus grand (au sens de l'inclusion) faisable compris dans X (Korte, Lovász et Schrader [19] utilise le terme de *base*). De par la stabilité par réunion des faisables, l'intérieur d'un sous-ensemble de E est unique.

Lemme 2.4. *Un sous-ensemble $L \subseteq E$ est libre si et seulement si $L = \Gamma(I)$, pour I l'intérieur de $E \setminus L$.*

Démonstration. Soient $L \subseteq E$ un ensemble libre et $I \in \mathcal{F}$ l'intérieur de $E \setminus L$. Par définition de l'intérieur, il vient $\Gamma(I) \subseteq L$. Pour l'inclusion dans l'autre sens, notons que pour tout $l \in L$ nous avons qu'il existe un faisable F tel que $F \cap L = \{l\}$. Nous avons donc que $F \not\subseteq I$, et l'accessibilité nous permet de dire qu'il est possible de trouver une suite f_1, \dots, f_k d'éléments de F telle que $F \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \cup I = \{f\} \cup I$ pour un certain $f \in F$, avec $F \setminus \{f_1, \dots, f_k\} \in \mathcal{F}$. Donc, il existe bien un $f \in F$ tel que $I \cup \{f\} \in \mathcal{F}$. Comme I est l'intérieur de $E \setminus X$, il s'en suit que $f \in L$ et donc $f = l$ ce qui nous donne $l \in \Gamma(I)$.

Pour la condition suffisante, soient $I \in \mathcal{F}$ et $L = \Gamma(I)$. Alors $\text{Tr}(\mathcal{F}, L) = 2^L$ car pour tout $l \in L$, nous avons que $I \cup \{l\} \in \mathcal{F}$ et que \mathcal{F} est stable par réunion. \square

Lemme 2.5. *Soient un circuit C et I l'intérieur de $E \setminus C$, alors $\Gamma(I) \subseteq C$ et $|C \setminus \Gamma(I)| = 1$.*

Démonstration. Nous avons que l'inclusion $\Gamma(I) \subset C$ est stricte car sinon C serait libre par le Lemme 2.4. Donc il existe un $r \in C \setminus \Gamma(I)$ et I est aussi l'intérieur de $E \setminus (C \setminus \{r\})$. Comme $C \setminus \{r\}$ est libre par définition d'un circuit, nous avons que $C \setminus \{r\} = \Gamma(I)$ toujours par le Lemme 2.4. \square

Nous sommes à présent capables de définir de nouvelles notions. Soit un circuit C , nous nommerons la *racine* de C , l'unique élément r de C satisfaisant $\{r\} = C \setminus \Gamma(I)$, où I est l'intérieur de $E \setminus C$. L'ensemble $C \setminus \{r\}$ sera quant à lui appelé la *tige*. Généralement, nous écrirons (C, r) pour un circuit C possédant r comme racine (ou $(C \setminus \{r\}, r)$ dans certains exemples pour éviter la redondance). La prochaine proposition donne une vision un peu plus intuitive des circuits et de leurs racines, mais avant cela, illustrons la notion de racine par un exemple.

Exemple 11. Si nous reprenons l'antimatroïde de l'Exemple 9. Nous redonnons ici ses circuits en termes de tige et racine : $(\{1\}, 3)$, $(\{1\}, 4)$ et $(\{1, 2\}, 3)$.

Proposition 2.6. *Soient (E, \mathcal{F}) un antimatroïde, $C \subseteq E$ et $r \in C$. Alors C est un circuit avec r comme racine si et seulement si $\text{Tr}(\mathcal{F}, C) = 2^C \setminus \{r\}$.*

Démonstration. Soit (C, r) un circuit, par définition d'un circuit $C \setminus \{r\}$ est libre et $2^{C \setminus \{r\}} \subseteq \text{Tr}(\mathcal{F}, C)$. Supposons $\{r\} \in \text{Tr}(\mathcal{F}, C)$, c'est-à-dire $F \cap C = \{r\}$ pour un certain $F \in \mathcal{F}$. Imposons que F soit minimum (au sens de l'inclusion) pour cette propriété. Soit I l'intérieur de $E \setminus C$. Nous avons I et F sont deux faisables, donc $I \cup F$ l'est aussi. Par maximalité de l'intérieur I et minimalité de F nous avons $I \cup F = I \cup \{r\}$. Cela implique que $I \cup \{r\} \in \mathcal{F}$, ce qui contredit $\{r\} = C \setminus \Gamma(I)$ dans la définition de la racine. Donc $\{r\} \notin \text{Tr}(\mathcal{F}, C)$.

Montrons à présent que $\{r, x\} \in \text{Tr}(\mathcal{F}, C)$ pour tout x dans C . Nous savons, parce que C est non libre minimal, qu'il existe un faisable F tel que $F \cap (C \setminus \{x\}) = \{r\}$, pour tout $x \in C \setminus \{r\}$. Soit I l'intérieur de $E \setminus C$, par le Lemme 2.5, nous avons que $C \setminus \Gamma(I) = \{r\}$, donc $x \in \Gamma(I)$ et donc $F' = (I \cup \{x\}) \cup F$ est une réunion de faisables. Nous avons bien $F' \cap C = \{r, x\}$.

Comme $\text{Tr}(\mathcal{F}, C)$ est clos pour la réunion (Proposition 2.3) ceci termine de montrer que $\text{Tr}(\mathcal{F}, C) = 2^C \setminus \{r\}$.

La condition suffisante est triviale. Si $\text{Tr}(\mathcal{F}, C) = 2^C \setminus \{r\}$, alors C est non libre minimal. Et comme $r \notin \Gamma(I)$ (sinon il existerait un faisable $F = I \cup \{r\}$ tel que $F \cap C = \{r\}$), nous avons bien que r est la racine de C . \square

Corollaire 2.7. *Soit (E, \mathcal{F}) un antimatroïde possédant un circuit (C, r) . Alors $\{r\} \in \tau(C \setminus r)$.*

Démonstration. Supposons que $r \notin \tau(C \setminus \{r\})$, cela implique que $r \in E \setminus \tau(C \setminus \{r\})$ qui (par définition de l'opérateur τ) est un faisable. Nous avons donc $(E \setminus \tau(C \setminus \{r\})) \cap C = \{r\}$ qui implique $\{r\} \in \text{Tr}(\mathcal{F}, C)$, ce qui contredit la Proposition 2.6. \square

Nous allons maintenant illustrer les notions d'ensembles libres, circuits et continuation faisable sur des familles d'antimatroïdes.

Exemple 12. Soient (E, \leq) un ensemble partiellement ordonné et (E, \mathcal{F}) l'antimatroïde d'ordre lui correspondant. Dans ce cas, les ensembles libres sont exactement les antichaînes. Les circuits sont de la forme $(\{a\}, b)$ avec $a < b$. Et la continuation faisable d'un ensemble $F \in \mathcal{F}$ est constituée des éléments minimaux de $E \setminus F$.

Exemple 13. Soit T un arbre et (E, \mathcal{F}) l'antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets lui correspondant. Dans ce cas, les ensembles libres sont exactement les ensembles de feuilles des sous-arbres. Les circuits sont de la forme $(\{a, b\}, c)$ avec c se trouvant sur le chemin entre a et b . La continuation faisable d'un ensemble $F \in \mathcal{F}$ est constituée des feuilles de l'arbre $T \setminus F$. Notons que cet exemple est facilement adaptable au cas des antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes.

Les circuits d'un antimatroïde peuvent être fort utiles comme le montre la proposition suivante :

Proposition 2.8. *Un antimatroïde est un antimatroïde d'ordre si et seulement si tous ses circuits ont un cardinal égal à 2.*

Démonstration. Soit un antimatroïde d'ordre ; nous avons vu dans l'Exemple 12 que ses circuits sont tous de la forme $(\{a\}, b)$ avec $a < b$ dans l'ensemble ordonné correspondant.

Pour vérifier la condition suffisante, prenons un antimatroïde (E, \mathcal{F}) ne possédant que des circuits de cardinalité 2. Posons $a <_C b$ pour chaque circuit $(\{a\}, b)$ avec $a, b \in E$ et vérifions que $<_C$ est bien une relation d'ordre stricte.

Vérifions l'asymétrie. De façon directe, le fait d'avoir un circuit $(\{a\}, b)$ implique qu'il existe un faisable F tel que $F \cap \{a, b\} = \{a\}$. Par la Proposition 2.6, cela empêche l'existence du circuit $(\{b\}, a)$, et donc $a <_C b \Rightarrow \neg(b <_C a)$.

Vérifions la transitivité. Soient $C_1 = (\{a\}, b)$ et $C_2 = (\{b\}, c)$, montrons que la trace sur $\{a, c\}$ est $\text{Tr}(\mathcal{F}, \{a, c\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{a, c\}\}$. Il est trivial de voir que \emptyset et $\{a, c\}$ sont dans $\text{Tr}(\mathcal{F}, \{a, c\})$. Montrons que $\{a\} \in \text{Tr}(\mathcal{F}, \{a, c\})$. Par l'existence de C_1 et par la Proposition 2.6, il existe un faisable F tel que $F \cap \{a, b\} = \{a\}$. Ceci implique que $F \cap \{a, c\} = \{a\}$. Effectivement, nous savons que F ne peut pas contenir b , et si $c \in F$ alors $F \cap \{b, c\} = \{c\}$, ce qui est en contradiction avec l'existence du circuit C_2 . Enfin,

montrons que $\{c\} \notin \text{Tr}(\mathcal{F}, \{a, c\})$. Supposons que cela ne soit pas le cas, cela impliquerait qu'un faisable F existe de sorte que $F \cap \{a, c\} = \{c\}$. Or par le circuit C_1 , $b \notin F$ et donc par le circuit C_2 , $c \notin F$. Il y a contradiction avec $F \cap \{a, c\} = \{c\}$.

Pour finir, l'irréflexibilité de $<_C$ découle du fait qu'aucun singleton n'est un circuit. Nous avons donc bien une relation d'ordre strict, de plus les circuits de l'antimatroïde d'ordre correspondant sont exactement les circuits avec lesquels nous avons débuté. \square

Notons que cette proposition peut aussi être vue comme un corollaire d'un théorème plus général dû à Dietrich qui caractérise les antimatroïdes via leurs circuits. Soient $C \subseteq E$ et $a \in E \setminus C$, nous nommerons (C, a) un *sous-ensemble enraciné* de E dont la racine est a .

Théorème 2.9. *Soit \mathcal{K} l'ensemble des sous-ensembles enracinés de E . Alors \mathcal{K} est l'ensemble des circuits d'un antimatroïde (E, \mathcal{F}) si et seulement si \mathcal{K} respecte les conditions suivantes :*

$$(C_1, r), (C_2, r) \in \mathcal{K} \text{ et } C_1 \subseteq C_2 \Rightarrow C_1 = C_2, \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \forall (C_1, r_1), (C_2, r_2) \in \mathcal{K} \text{ avec } r_1 \in C_2 \setminus r_2, \\ \exists (C_3, r_2) \in \mathcal{K} \text{ avec } C_3 \subseteq C_1 \cup C_2 \setminus r_1. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Démonstration. Voir [4]. \square

Chapitre 3

Polytopes d'antimatroïdes

Nous allons dans ce chapitre définir le polytope des faisables d'un antimatroïde et donner quelques propriétés générales le concernant. Ensuite, nous donnons une description linéaire pour ces polytopes dans quelques cas particuliers. Pour ceci, nous suivons l'article de Korte et Lovász [18]. Certains résultats ne seront pas démontrés (auquel cas, une référence est donnée). La raison à cela est que ces résultats proviennent d'horizons divers et que leurs preuves demandent en général l'introduction de nombreux nouveaux concepts qui nous éloigneraient du but de ce travail. Nous terminons ce chapitre par une introduction aux structures de connaissances et aux espaces d'apprentissages qui constituent entre autres une motivation à la recherche de descriptions linéaires pour les polytopes des faisables. Cette dernière section est principalement basée sur le livre de Falmagne et Doignon [11]

3.1 Approche géométrique

Rappelons rapidement qu'un antimatroïde (E, \mathcal{F}) vérifie

$$\mathcal{F} \text{ est clos par réunion,} \tag{AM1}$$

$$\forall F \in \mathcal{F}, F \neq \emptyset, \exists f \in F \text{ tel que } F \setminus \{f\} \in \mathcal{F}. \tag{AM2}$$

Abordons maintenant un aspect plus géométrique des antimatroïdes. Nous pouvons motiver cet aspect par le fait qu'il existe pour les matroïdes, qui sont des objets assez proche des antimatroïdes, une description élégante et complète de l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques de leurs ensembles équivalents aux ensembles faisables (appelés ensembles indépendants) [21]. Il est alors naturel de se poser la question de l'existence d'une telle description pour les antimatroïdes. De plus, posséder une description à la fois

en termes d'enveloppe convexe et en termes d'inégalités linéaires est souvent un atout dans de nombreux problèmes d'optimisation.

De façon générale, pour un couple (M, \mathcal{N}) avec M un ensemble et $\mathcal{N} \subseteq 2^M$, nous définissons le polytope $P_{\mathcal{N}}$ comme l'ensemble des points de \mathbb{R}^E défini par :

$$P_{\mathcal{N}} = \text{conv}(\chi^N : N \in \mathcal{N}).$$

De par sa définition, ce polytope est un *polytope 0/1*, c'est à dire un polytope de \mathbb{R}^n (où $n = |N|$) dont les sommets sont un sous-ensemble des sommets de l'hypercube $[0, 1]^n$.

Le *polytope des faisables* d'un antimatroïde (E, \mathcal{F}) est défini comme étant le polytope $P_{\mathcal{F}}$. Les sommets de ce polytope correspondent biunivoquement aux faisables (éléments de \mathcal{F}). Remarquons que l'origine et le point $(1, 1, \dots, 1)$ de \mathbb{R}^n sont toujours des sommets de $P_{\mathcal{F}}$ (car \emptyset et E sont toujours des faisables).

Proposition 3.1. *Le polytope des faisables d'un antimatroïde est plein.*

Démonstration. Soit (E, \mathcal{F}) un antimatroïde, alors $E \in \mathcal{F}$ et donc par (AM2), il existe une suite d'ensembles faisables $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_n = E$, avec $|E_i| = i$. Les points χ^{E_i} pour $0 \leq i \leq |E|$, sont affinement indépendants, donc nous avons bien un polytope plein. \square

Notons que nous avons défini ici le polytope des faisables d'un antimatroïde à partir de son ensemble de faisables. Nous pouvons de même définir le *polytope des convexes* de cet antimatroïde comme l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques des ensembles convexes de l'antimatroïde. Notons que ces deux polytopes (le polytope des faisables et le polytope des convexes d'un même antimatroïde) sont échangés par l'affinité d'équations

$$x'_i = 1 - x_i \quad \text{pour tout } i \in E. \tag{3.1}$$

Nous allons à présent décrire les polytopes des faisables pour certains ensembles d'antimatroïdes en termes d'inégalités linéaires. La définition du polytope des faisables, livre les sommets de celui-ci mais pas les facettes. Nous commencerons par quelques remarques générales sur certaines inégalités valides et facettes avant d'observer des descriptions de polytopes des faisables dans certains cas particuliers.

Pour commencer, le fait le plus trivial est que les contraintes, appelées *contraintes de boîte*, sont valides pour $P_{\mathcal{F}}$:

$$0 \leq x \leq 1.$$

Effectivement, car les polytopes des faisables sont des polytopes 0/1. Pour la prochaine

proposition, nous avons besoin de définir un autre type de contrainte. Soit (C, r) un circuit d'un antimatroïde (E, \mathcal{F}) , nous appellerons *contrainte de circuit* l'inégalité :

$$\sum_{i \in C \setminus \{r\}} x_i \geq x_r.$$

Bien que les contraintes de circuits ne soient pas toujours des facettes, nous pouvons quand même énoncer la proposition suivante :

Proposition 3.2. *Les contraintes de circuits d'un antimatroïde sont toujours valides pour son polytope des faisables.*

Démonstration. Soit (C, r) un circuit de (E, \mathcal{F}) , et supposons qu'il existe un faisable F tel que le sommet du polytope χ^F viole la contrainte de circuit. Comme χ^F est un vecteur dont les composantes sont soit zéro soit un, nous avons pour tout $i \in C \setminus \{r\}$ nécessairement $i \notin F$, et $r \in F$. Ceci implique $F \cap C = \{r\}$ et contredit le fait que (C, r) soit un circuit (voir Proposition 2.6). \square

Plus intéressant, les deux propositions suivantes nous précisent quelles contraintes de boîte définissent des facettes.

Proposition 3.3. *L'inégalité $x_a \geq 0$ définit une facette de $P_{\mathcal{F}}$ si et seulement si $\{a\}$ est un ensemble convexe.*

Démonstration. Supposons que $x_a \geq 0$ définit une facette. Donc il existe $F_1, \dots, F_{|E|}$ dans \mathcal{F} tels que les vecteurs $\chi^{F_1}, \dots, \chi^{F_{|E|}}$ sont affinement indépendants et $a \notin F_i$ pour $0 \leq i \leq |E|$. Soit F la réunion de tous les F_i , par (AM1) $F \in \mathcal{F}$. Supposons qu'il existe un $e \in E \setminus \{a\}$ tel que $e \notin F$. Alors, $x_e \geq 0$ définit une facette de $P_{\mathcal{F}}$ (l'inégalité est valide car c'est une contrainte de boîte et les χ^{F_i} sont des sommets affinement indépendants compris dedans). Ainsi l'intersection des deux hyperplans d'équations $x_a = 0$ et $x_e = 0$ comprendrait $|E|$ sommets affinement indépendants, ce qui est une contradiction. Il en suit que $F = E \setminus \{a\}$ et prouve que $\{a\}$ est un convexe.

Pour la réciproque, supposons $\{a\}$ convexe, cela revient à imposer $E \setminus \{a\} \in \mathcal{F}$. Donc, par (AM2), il existe une suite d'ensembles faisables $\emptyset = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_{n-1} = E \setminus \{a\}$, avec $|E_i| = i$. Ceci nous donne $|E|$ sommets χ^{E_i} pour tout i compris entre 0 et $|E| - 1$. Ces sommets sont affinement indépendants et appartiennent à l'hyperplan $x_a = 0$. Donc l'inégalité de boîte, qui est valide, définit facette. \square

Proposition 3.4. *L'inégalité $x_a \leq 1$ définit une facette de $P_{\mathcal{F}}$ si et seulement si il n'existe pas de circuit à deux éléments dont a est racine.*

Démonstration. Supposons que $x_a \leq 1$ définit une facette. Donc il existe $F_1, \dots, F_{|E|}$ dans \mathcal{F} tels que les vecteurs $\chi^{F_1}, \dots, \chi^{F_{|E|}}$ sont affinement indépendants et $a \in F_i$ pour $0 \leq i \leq |E|$. Supposons que $(\{b\}, a)$ soit un circuit, alors il n'existe pas de faisable F tel que $F \cap \{a, b\} = \{a\}$. En particulier, il n'existe pas de faisable F tel que $\chi_a^F = 1$ et $\chi_b^F = 0$. Alors, $x_b \leq 1$ définit une facette de $P_{\mathcal{F}}$ (l'inégalité est valide car c'est une contrainte de boîte et les χ^{F_i} sont des sommets affinement indépendants compris dedans). Ainsi, l'intersection des deux hyperplans d'équations $x_a = 1$ et $x_b = 1$ comprendrait $|E|$ sommets affinement indépendants, ce qui est une contradiction.

Pour la réciproque, montrons que les vecteurs caractéristiques des faisables contenant a engendrent vectoriellement \mathbb{R}^E , cela impliquera que $x_a \geq 1$ définit bien une facette de $P_{\mathcal{F}}$ (rappelons que l'origine est un sommet de \mathcal{F}). Pour tout $b \in E \setminus a$, comme $(\{a\}, b)$ n'est pas un circuit, il existe un faisable F tel que $a \in F$ mais $b \notin F$. Choisissons F maximal pour cette propriété. Il s'ensuit que $F \cup \{b\} \in \mathcal{F}$. Donc $\chi^b = \chi^{F \cup \{b\}} - \chi^F$ est dans l'espace linéaire engendré par les vecteurs χ^U avec $U \in \mathcal{F}$ et $a \in U$. De plus, $\chi^a = \chi^F - \sum_{f \in F \setminus a} \chi^f$ est aussi dans cet espace linéaire. Comme les vecteurs χ^e , pour $e \in E$, engendrent \mathbb{R}^E , nous concluons que c'est aussi le cas des vecteurs χ^U , pour U faisable contenant a . \square

3.2 Polytope d'antimatroïdes d'ordre

Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et (E, \mathcal{F}) son antimatroïde d'ordre associé. Nous avons vu dans la Proposition 2.8 que les circuits de cet antimatroïde sont $(\{i\}, j)$ où $i, j \in E$ avec $i < j$. Les contraintes de circuits s'écrivent donc $x_a \geq x_b$ avec $a < b$. Nous allons montrer que ces contraintes de circuits suffisent à décrire $P_{\mathcal{F}}$, de plus nous obtenons une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour savoir quand $x_a \geq x_b$ donne lieu à une facette. Pour cela nous allons nous baser sur l'article de Stanley [26] qui cite un résultat de Geissinger sans démonstration. Malheureusement, le texte original de Geissinger ne semble plus accessible, nous présenterons donc ici l'approche abordée par Stanley et compléterons celle-ci par une preuve du théorème de Geissinger (qui en soi n'est pas très difficile à démontrer).

Cette approche se fait via la définition d'un polytope associé à un ensemble ordonné (E, \leq) . Nous montrons par la suite que les sommets de ce polytope sont exactement les vecteurs caractéristiques des filtres de (E, \leq) . Donc le polytope défini n'est rien d'autre que le polytope des convexes de (E, \mathcal{F}) .

Introduisons d'abord quelques notions, le *polytope d'ordre* P_E d'un ensemble ordonné

(E, \leq) est le sous-ensemble de \mathbb{R}^E défini par

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad \text{pour tout } i \in E, \quad (3.2)$$

$$x_i \leq x_j \quad \text{pour tout } i, j \in E \text{ tels que } i < j. \quad (3.3)$$

Ces contraintes peuvent être remplacées de façon équivalente par

$$0 \leq x_i \quad \text{si } i \text{ est un élément minimal dans } E, \quad (3.4)$$

$$x_i \leq 1 \quad \text{si } i \text{ est un élément maximal dans } E,$$

$$x_i \leq x_j \quad \text{pour tout } i, j \in E \text{ tels que } j \text{ couvre } i. \quad (3.5)$$

Effectivement, les contraintes (3.2) comprennent et se déduisent des contraintes (3.4) grâce aux conditions (3.3). De même que les contraintes (3.3) comprennent et se déduisent des contraintes (3.5) grâce à la transitivité de l'ensemble ordonné. Notons que (3.4) et (3.5) sont indépendantes (dans le sens qu'aucune ne se déduit des autres) et donc définissent les facettes de P_E .

Par facilité, nous allons travailler avec \widehat{E} qui est l'ensemble ordonné obtenu à partir de E en y ajoutant un élément minimal $\widehat{0}$ et un élément maximal $\widehat{1}$. Définissons le polytope \widehat{P}_E comme étant l'ensemble de $\mathbb{R}^{\widehat{E}}$ défini par

$$x_{\widehat{0}} = 0, \quad (3.6)$$

$$x_{\widehat{1}} = 1, \quad (3.7)$$

$$x_i \leq x_j \quad \text{pour tout } i, j \in E \text{ tels que } i < j. \quad (3.8)$$

L'application linéaire de projection $\rho : \widehat{P}_E \rightarrow P_E$ (qui efface les coordonnées $x_{\widehat{0}}$ et $x_{\widehat{1}}$) induit une bijection de \widehat{P}_E sur P_E . Il en résulte un isomorphisme linéaire (donc aussi combinatoire) de \widehat{P}_E sur P_E . Les points sur les facettes de P_E satisfont $x_i = x_j$ pour $i, j \in \widehat{E}$ avec j couvrant i .

Nous cherchons à présent une description de \widehat{P}_E (ou de façon équivalente de P_E) en termes d'enveloppe convexe. Comme dans un polytope toute face est une intersection de facettes (Proposition 1.1), il en suit qu'une face F_π de \widehat{P}_E correspond à une certaine partition $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ des éléments de \widehat{E} en blocs non vides, deux à deux disjoints et tels que

$$F_\pi = \{x \in \widehat{P}_E : \text{pour tout } B_l \in \pi \text{ et pour tout } i, j \in B_l, x_i = x_j\}. \quad (3.9)$$

Nous allons déterminer pour quelles partitions π de \widehat{E} , F_π est une face de \widehat{P}_E . Voici à

présent les définitions dont nous aurons besoin. Nous appellerons naturellement π une *partition de face* si F_π est une face de \widehat{P}_E . Une partition est dite *connexe* si chaque bloc forme un ensemble de sommets connexe dans le graphe dirigé de couverture de \widehat{E} . Nous appellerons une partition $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ *fermée* si pour tout $i \neq j$, il existe un $x \in F_\pi$ tel que $x|_{B_i} \neq x|_{B_j}$. Notons le lemme suivant qui nous servira par la suite.

Lemme 3.5. *Si $\pi = \{B_1, \dots, B_k\}$ est une partition de face fermée alors $\dim F_\pi = k - 2$.*

Démonstration. Nous avons que, si $\widehat{0} \in B_i$ et $\widehat{1} \in B_j$, alors tout x dans F_π satisfait $x|_{B_i} = 0$ et $x|_{B_j} = 1$. Soit B_l dans π , considérons le vecteur e_{B_l} de $\mathbb{R}^{\widehat{E}}$ dont la i -ème composante vaut 1 si $i \in B_l$ et 0 sinon. Alors l'ensemble des e_{B_l} pour $l \in \{1, \dots, k\} \setminus \{i, j\}$ est compris dans F_π et engendre un espace affine de dimension $k - 2$. \square

Définissons une relation binaire \leq_π sur π avec $B_l \leq_i B_m$ si $i \leq j$ pour un i dans B_l et un j dans B_m . Nous appellerons une partition π *compatible* si la fermeture transitive de \leq_π est une relation d'ordre (c.-à-d. si elle est antisymétrique, car elle est par définition réflexive et transitive). Observons que si π est compatible, alors π est *convexe*, c'est-à-dire que chaque bloc B est un convexe au sens de l'ensemble ordonné (\widehat{E}, \leq) . Mais la réciproque n'est pas vraie, si nous observons l'ensemble ordonné \widehat{E} donné par la Figure 3.1, nous voyons que la partition en bloc $\pi = \{\{\widehat{0}\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{\widehat{1}\}\}$ est connexe et convexe

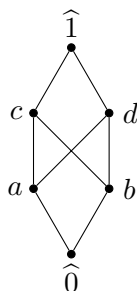


FIGURE 3.1

mais pas compatible. Effectivement, \leq_π n'est pas antisymétrique car $\{a, d\} \leq_\pi \{b, c\}$ et $\{b, c\} \leq_\pi \{a, d\}$ mais $\{a, d\} \neq \{b, c\}$.

Comme annoncé plus haut nous pouvons enfin énoncer le théorème dû à Geissinger.

Théorème 3.6. *Soit (E, \leq) un ensemble ordonné, alors une partition de E est une partition de face fermée si et seulement si elle est connexe et compatible.*

Démonstration. Soit π une partition de face fermée, alors π est connexe, car comme dit plus haut, une face est obligatoirement l'intersection de facettes. Supposons que \leq_π

ne soit pas compatible. Cela veut dire qu'il existe B_i et B_j dans π avec $e_1, e_2 \in B_i$ et $f_1, f_2 \in B_j$ tels que $f_1 < e_1$ et $e_2 < f_2$. Nous montrons qu'il y a contradiction avec le fait que π est fermée. Soit $x \in F_\pi$, nous savons que $x_{e_1} = x_{e_2}$ et $x_{f_1} = x_{f_2}$ par (3.9). Nous savons aussi par (3.8) que $x_{f_1} \leq x_{e_1}$ et $x_{e_2} \leq x_{f_2}$. Cela nous donne la suite d'inégalités suivante :

$$x_{f_1} \leq x_{e_1} = x_{e_2} \leq x_{f_2} = x_{f_1}.$$

Comme le premier et le dernier membre sont les mêmes, les inégalités considérées sont en fait des égalités. En particulier, $x_{e_1} = x_{f_1}$ qui implique par (3.9) que $x|_{B_i} = x|_{B_j}$, et donc π n'est pas fermée.

Pour la réciproque, soit π connexe et compatible, montrons que π est une partition de face. Effectivement, comme π est connexe, l'intersection des hyperplans du type $x_e = x_f$ pour e et f appartenant au même bloc dans π , avec $e < f$ et f qui couvre e nous donne F_π . Or cette intersection est une intersection d'hyperplans définissant des facettes et donc cette intersection définit une face. De plus (π, \leq_π) est un ensemble ordonné. Donc si $B_i \leq_\pi B_j$, alors $x_e \leq x_f$, pour tout $e \in B_i$ et $f \in B_j$. Alors l'antisymétrie de \leq_π nous dit qu'il n'existe pas de $e' \in B_i$ et $f' \in B_j$ avec $e' \geq f'$ et donc $x_{e'} \geq x_{f'}$ n'est pas une contrainte du polytope. Il existera donc un $x \in F_\pi$ tel que $x|_{B_i} \neq x|_{B_j}$, ce qui montre que π est fermée. \square

Ceci nous donne le théorème suivant :

Théorème 3.7. *Soit (E, \leq) un ensemble ordonné et (E, \mathcal{F}) son antimatroïde d'ordre associé. Si H et M sont respectivement les ensembles des éléments maximaux et minimaux de E , alors*

$$P_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathbb{R}^E : x_h \geq 0 \text{ pour } h \in H, x_m \leq 1 \text{ pour } m \in M, x_i \leq x_j \text{ pour } j \prec i\}.$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.

Démonstration. Considérons le polytope

$$P_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}^E : 1 - x_h \geq 0 \text{ pour } h \in H, 1 - x_m \leq 1 \text{ pour } m \in M, x_i \leq x_j \text{ pour } i \prec j\}.$$

Notons que $P_{\mathcal{A}} = P_E$ avec les notations précédentes. Donc nous savons déjà que toutes les inégalités décrites définissent des facettes. Montrons que les sommets de $P_{\mathcal{A}}$ sont les vecteurs caractéristiques des filtres de E . Pour trouver les sommets de P_E , il suffit de trouver les partitions π de E de face fermée qui sont composées de deux blocs. Grâce au Lemme 3.5, nous savons que dans ce cas, $\dim F_\pi = 0$ et de ce fait, F_π sera un sommet.

Comme les partitions de E de face fermée qui sont composées de deux blocs sont les filtres de E , nous avons bien $\chi^{\text{ftt}(e)}$ est un sommet de $P_{\mathcal{A}}$ pour tout e dans E

Or, si les sommets de $P_{\mathcal{A}}$ sont les vecteurs caractéristiques des filtres de E , alors $P_{\mathcal{A}}$ est bien le polytope des convexes de (E, \mathcal{F}) . Et le théorème est démontré en utilisant l'affinité (3.1). \square

Exemple 14. Nous donnons sur la Figure 3.2 un exemple d'un antimatroïde d'ordre, basé sur (E, \leq) et de son polytope des faisables. Nous avons choisi ici un exemple simple qui nous montre un polytope de dimension 3 afin de bien visualiser les facettes de celui-ci.

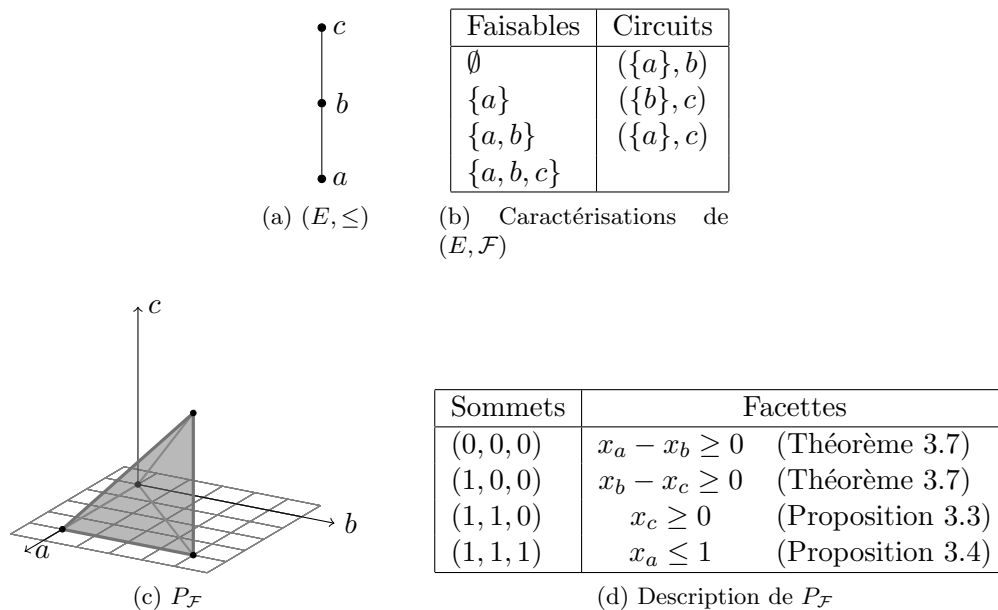


FIGURE 3.2 – Exemple d'un polytope des faisables de dimension 3 pour un antimatroïde d'ordre.

3.3 Polytope d'antimatroïdes d'ordre double

Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et (E, \mathcal{F}) son antimatroïde d'ordre double associé. Pour définir $P_{\mathcal{F}}$ en termes d'inégalités nous utiliserons un résultat de Gröflin. Pour cela nous avons besoin de deux définitions. Soit $G = (V, U)$ un graphe dirigé ; un *sous-ensemble convexe* est un sous-ensemble T de V tel que si $v_1, v_2 \in T$ et $w \in V$ est sur un chemin dirigé de v_1 à v_2 , alors $w \in T$. Soit S un chemin dans G dont l'ensemble de sommets est $V(S)$, le vecteur $A \in \mathbb{R}^V$ à coordonnées dans $\{-1, 0, 1\}$ est appelé un *vecteur alternant de*

chemin de S dans G si son support est dans $V(S)$ et qu'en parcourant S , si nous ignorons les composantes nulles, les $+1$ et -1 alternent dans une séquence $+1, -1, +1, \dots, -1, +1$. De façon analogue si Q est un circuit dans G dont l'ensemble de sommets est $V(Q)$ le vecteur $R \in \mathbb{R}^V$ est appelé un *vecteur alternant de circuit de R dans G* si ses composantes sont dans $\{-1, 0, 1\}$, son support est dans $V(R)$ et qu'en parcourant R (en ignorant les composantes nulles) les $+1$ et -1 alternent dans une séquence $+1, -1, +1, \dots, -1, +1$.

Théorème 3.8. *Si G est un graphe dirigé et \mathcal{A} l'ensemble de tous les sous-ensembles convexes de G , alors*

$$P_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}_+^V : M_1 x \leq 1, M_2 x \leq 1\},$$

où M_1 est la matrice avec comme lignes tous les vecteurs alternants de chemins de G et M_2 la matrice avec comme lignes tous les vecteurs alternants de circuits de G .

Démonstration. Voir [14]. □

Nous pouvons à présent appliquer ce théorème pour obtenir une description linéaire des antimatroïdes d'ordre double.

Théorème 3.9. *Soient (E, \leq) un ensemble ordonné et (E, \mathcal{F}) son antimatroïde d'ordre double associé, alors*

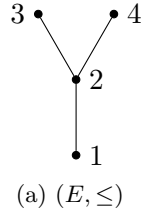
$$P_{\mathcal{F}} = \{x \in \mathbb{R}^E : 0 \leq x_i \leq 1, x_{i_1} - x_{i_2} + x_{i_3} - \dots + x_{i_{2k+1}} \geq 0, \\ \text{pour tout } i_1, \dots, i_{2k+1} \in E \text{ avec } i_1 < \dots < i_{2k+1}\}.$$

Démonstration. Soit G le graphe dirigé de couverture de (E, \leq) . Notons que G ne possède pas de circuit (par l'antisymétrie de \leq). Dans ce cas, les sous-ensembles convexes de G sont exactement les convexes usuels de la théorie des ensembles ordonnés. Appliquons le Théorème 3.8 sur G . Nous avons que

$$P_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}_+^E : M_1 x \leq 1\}.$$

En utilisant l'affinité (3.1) d'équations $x'_i = 1 - x_i$ pour tout $i \in E$ qui permet de passer du polytope des convexes au polytope des faisables et en observant que $M_1 \mathbf{1} = \mathbf{1}$, nous avons notre résultat. □

Exemple 15. Nous donnons sur la Figure 3.3 un exemple d'antimatroïde d'ordre double, basé sur (E, \leq) et de son polytope des faisables. Observons que l'ensemble ordonné de la Figure 3.3a possède deux chaînes de longueur au moins trois, à savoir $1 < 2 < 3$ et $1 < 2 < 4$.



Faisables		Facette de $P_{\mathcal{F}}$
\emptyset	$\{1, 2\}$	$x_1 \geq 0, \quad x_1 \leq 1,$
$\{1\}$	$\{1, 2, 3\}$	$x_2 \geq 0, \quad x_1 \leq 1,$
$\{3\}$	$\{1, 2, 4\}$	$x_3 \geq 0, \quad x_1 \leq 1,$
$\{4\}$	$\{1, 3, 4\}$	$x_4 \geq 0, \quad x_1 \leq 1,$
$\{1, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	$x_1 - x_4 + x_2 \geq 0,$
$\{1, 4\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$x_1 - x_4 + x_3 \geq 0,$
$\{3, 4\}$		

(b) Description de $P_{\mathcal{F}}$

FIGURE 3.3 – Description linéaire d'un polytope des faisables pour un antimatroïde d'ordre double.

3.4 Polytope d'antimatroïdes d'élagage d'arbre par arêtes

Soient $T = (V, E)$ un arbre et (E, \mathcal{F}) son antimatroïde d'élagage d'arbre par arêtes associé. Pour définir $P_{\mathcal{F}}$ en termes d'inégalités nous utiliserons un résultat de Gröflin et Liebling. Pour cela nous avons besoin de deux définitions. Un vecteur $b \in \mathbb{R}^E$ est un *vecteur alterné de T* si ses composantes sont dans $\{-1, 0, 1\}$, que l'ensemble $\{e \in E : b_e \geq 0\}$ couvre tout les sommets de T et que chaque composante connexe de cette couverture contient exactement une arête u telle que $b_u = 1$.

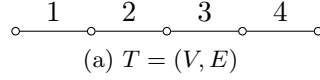
Théorème 3.10. *Soient $T = (V, E)$ un arbre, B l'ensemble de ses vecteurs alternés et \mathcal{A} l'ensemble de tous les sous-graphes connexes de T , alors*

$$P_{\mathcal{A}} = \{x \in \mathbb{R}_+^E : \forall b \in B b^\top x \leq 1\}.$$

Démonstration. Voir [20]. □

Encore une fois, en utilisant l'affinité (3.1), nous pouvons obtenir une description pour $P_{\mathcal{F}}$

Exemple 16. Nous donnons sur la Figure 3.4 un exemple d'antimatroïde d'élagage d'arbre par arêtes, basé sur $T = (V, E)$ et de son polytope des faisables. Observons que les vecteurs alternés associés à T sont $(1, -1, 1, 0)$, $(1, -1, 0, 1)$, $(1, 0, -1, 1)$ et $(0, 1, -1, 1)$.



Faisables			Facette de $P_{\mathcal{F}}$		
\emptyset	$\{1, 2\}$	$\{1, 3, 4\}$	$x_1 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 - x_2 + x_3 \geq 0,$
$\{1\}$	$\{3, 4\}$	$\{2, 3, 4\}$	$x_2 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 - x_2 + x_4 \geq 0,$
$\{4\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$x_3 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 - x_3 + x_4 \geq 0,$
$\{1, 4\}$	$\{1, 2, 4\}$		$x_4 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_2 - x_3 + x_4 \geq 0,$

(b) Description de $P_{\mathcal{F}}$

FIGURE 3.4 – Description linéaire d'un polytope des faisables pour un antimatroïde d'élagage d'arbre par arêtes.

3.5 Polytope d'antimatroïdes d'élagage d'arbre par sommets

Soit $T = (V, E)$ un arbre. Un vecteur d de \mathbb{R}^V est appelé un *vecteur de degré entrant* s'il existe une orientation de T de sorte que d_v soit le degré entrant de v pour tout v dans V . Nous remarquons facilement que $d \in \mathbb{N}^V$ si et seulement si

$$\sum_{v \in V} d_v = |V| - 1, \quad (3.10)$$

et que pour tout $e \in E$ et pour toute composante connexe $T' = (V', E')$ du graphe $(V, E \setminus \{e\})$,

$$\sum_{v \in V'} d_v \leq |V'|. \quad (3.11)$$

Cette définition est utilisée dans le théorème suivant.

Théorème 3.11. *Soient $T = (V, E)$ un arbre et (V, \mathcal{F}) son antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets associé, soit D l'ensemble des vecteurs entrants de T , alors*

$$P_{\mathcal{F}} = \left\{ x \in \mathbb{R}^E, 0 \leq x \leq 1, \sum_{i \in V} (1 - d_i) x_i \geq 0 \forall d \in D \right\}.$$

De plus, toutes ces inégalités définissent des facettes.

Démonstration. Nous allons plutôt montrer l'égalité suivante pour le polytope des

convexes de (V, \mathcal{F}) :

$$P_{\mathcal{A}} = \left\{ x \in \mathbb{R}_+^E, \sum_{i \in V} (1 - d_i)x_i \leq 1 \forall d \in D \right\}.$$

Premièrement, montrons que ces inégalités sont valides pour $P_{\mathcal{A}}$. Soit $A \in \mathcal{A}$, alors

$$\sum_{i \in V} (1 - d_i)\chi^A = \sum_{i \in A} (1 - d_i) = |A| - \sum_{i \in A} d_i. \quad (3.12)$$

Mais cette dernière différence est toujours plus petite que 1, par l'équation (3.10) restreinte à A .

Supposons que $f(x) = \sum a_i x_i \leq c$ soit une facette de $P_{\mathcal{A}}$. Comme $\emptyset \in \mathcal{A}$, nous avons $c \geq 0$.

Étudions d'abord le cas $c = 0$. Comme tout singleton est convexe (car (V, \mathcal{F}) est un antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets), nous avons $a_i \leq 0$, pour tout i dans V . Nous pouvons supposer qu'il existe un $i \in V$ tel que $a_i < 0$. Mais alors, tout point de $P_{\mathcal{A}}$ satisfaisant $f(x) = c$ est contraint d'avoir sa i -ème composante nulle. Donc $f(x) \leq 0$ doit être équivalent à $x_i \geq 0$ (dans le sens où elles définissent la même facette).

Prenons à présent le cas $c > 0$. Pour toute arête $\{i, j\}$ il doit exister un $A \in \mathcal{A}$ tel que $f(\chi^A) = c$ et A sépare le sommet i du sommet j (c.-à-d. $i \in A, j \notin A$ ou $i \notin A, j \in A$). Effectivement, s'il n'existe pas de tel A , alors $\chi_i^S = \chi_j^S$ pour tout sommet χ^S de la facette $f(x) \leq c$. Donc celle-ci est comprise dans l'hyperplan $x_i = x_j$, ce qui est impossible car ni $x_i \leq x_j$, ni $x_j \leq x_i$ n'est valide pour $P_{\mathcal{A}}$.

Orientons $\{i, j\}$ de i à j s'il existe un ensemble $A \in \mathcal{A}$ tel que $f(\chi^A) = c, i \in A$ et $j \notin A$. Remarquons qu'aucune arête ne reçoit deux orientations : supposons qu'il existe $A' \in \mathcal{A}$ tel que $f(\chi^{A'}) = c, j \in A'$ mais $i \notin A'$. Alors $A \cup A'$ est dans \mathcal{A} (puisque nous sommes dans un arbre) et $f(\chi^{A \cup A'}) = 2c > c$, ce qui est une contradiction.

Soit d_i le degré entrant du sommet i dans cette orientation. Considérons tous les A dans \mathcal{A} avec $f(\chi^A) = c$. Alors toutes les arêtes joignant A à $V \setminus A$ sont orientées de l'intérieur de A vers l'extérieur. Nous avons donc

$$\sum_{i \in A} (1 - d_i) = |A| - \sum_{i \in A} d_i = |A| - (|A| - 1) = 1.$$

Et donc, tout sommet χ^A vérifiant $f(x) = c$, vérifie aussi

$$\sum_{i \in V} (1 - d_i)x_i = 1,$$

et $f(x) \leq c$ doit être de support pour cet hyperplan.

Il reste à montrer que toutes les inégalités données définissent une facette. Pour $x \geq 0$ cela vient de la Proposition 3.3 sur les contraintes de boîte. Passons à l'autre type d'inégalité, qui s'écrit pour une orientation donnée de T :

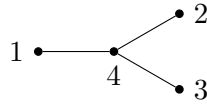
$$\sum_{i \in V} (1 - d_i) x_i \leq 1. \quad (3.13)$$

Soient $j \in V$ et $(h_1, j), \dots, (h_t, j)$ les arêtes rentrantes dans j . Soit $T_s = (V_s, E_s)$ la composante du graphe $(V, E \setminus \{(h_s, j)\})$ qui contient h_s , et soit $V_0 = V_1 \cup \dots \cup V_t \cup \{j\}$. Alors $V_0, V_1, \dots, V_t \in \mathcal{A}$, et chaque arête qui joint V_j à $V \setminus V_j$ est orientée de l'intérieur de V_j vers l'extérieur. Nous avons alors que

$$\sum_{i \in V_s} (1 - d_i) = 1,$$

et donc χ^{V_s} est un sommet de la face définie par (3.13), pour tout $s \in \{0, \dots, t\}$. Dans ce cas, $\chi^j = \chi^{V_0} - \chi^{V_1} - \dots - \chi^{V_t}$ est une combinaison linéaire de ces sommets. Comme ceci est valable pour tout j , tout vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^V peut s'obtenir comme combinaison linéaire d'éléments de la face (3.13). Donc cette face est bien une facette. \square

Exemple 17. Nous donnons sur la Figure 3.5 un exemple d'antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets, basé sur $T = (V, E)$ et de son polytope des faisables. Observons que les vecteurs de degré entrant associés à T sont $(0, 0, 0, 3)$, $(1, 0, 0, 2)$, $(0, 1, 0, 2)$, $(0, 0, 1, 2)$, $(1, 1, 1, 0)$, $(1, 1, 0, 1)$, $(1, 0, 1, 1)$ et $(0, 1, 1, 1)$.



(a) $T = (E, V)$

Faisables			Facette de $P_{\mathcal{F}}$		
\emptyset	$\{1, 2\}$	$\{1, 2, 4\}$	$x_1 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 + x_2 - x_4 \geq 0,$
$\{1\}$	$\{1, 3\}$	$\{1, 3, 4\}$	$x_2 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 + x_3 - x_4 \geq 0,$
$\{2\}$	$\{2, 3\}$	$\{2, 3, 4\}$	$x_3 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_2 - x_3 - x_4 \geq 0,$
$\{3\}$	$\{1, 2, 3\}$	$\{1, 2, 3, 4\}$	$x_4 \geq 0,$	$x_1 \leq 1,$	$x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 0,$

(b) Description de $P_{\mathcal{F}}$

FIGURE 3.5 – Description linéaire d'un polytope des faisables pour un antimatroïde d'élagage d'arbre par sommets.

3.6 Motivation : les structures de connaissances

Exposons brièvement une motivation à l'étude du polytope des faisables d'un anti-matroïde. Cette motivation provient de la théorie des structures de connaissances. En nous basant sur le livre de Falmagne et Doignon [11], nous introduisons rapidement les bases de cette théorie. Nous utiliserons quelques notions élémentaires de probabilité dans cette section, le lecteur non familiarisé avec ces notions peut se référer à [22]. Définissons une *structure de connaissances* comme étant un couple (Q, \mathcal{K}) , avec Q un ensemble fini d'éléments appelés *compétences* et \mathcal{K} une collection de sous-ensembles de Q appelés *états de connaissance*. Supposons également que $\emptyset \in \mathcal{K}$ et $Q \in \mathcal{K}$. Ensuite, définissons un *espace d'apprentissage* comme étant une structure de connaissances (Q, \mathcal{K}) , où

$$\mathcal{K} \text{ est clos par réunion,} \tag{3.14}$$

$$\forall K \in \mathcal{K}, K \neq \emptyset, \exists k \in K \text{ tel que } K \setminus \{k\} \in \mathcal{K}. \tag{3.15}$$

Nous voyons ici que le concept d'espace d'apprentissage est équivalent à celui d'anti-matroïde.

Une *structure de connaissances probabiliste* (Q, \mathcal{K}, π) est formée d'une structure de connaissances (Q, \mathcal{K}) et d'une distribution de probabilité π sur la collection \mathcal{K} . Une *structure de connaissances probabiliste paramétrisée* $(Q, \mathcal{K}, \pi, \beta, \eta)$ est une structure de connaissances probabiliste (Q, \mathcal{K}, π) avec pour tout q dans Q deux nombres réels compris dans $[0, 1]$ qui sont β_q représentant la probabilité d'*erreur de distraction* et η_q représentant la probabilité d'*essai chanceux*. Les lettres β et η désignent respectivement les vecteurs de valeurs β_q et η_q pour tout $q \in Q$. Si pour tout q , nous avons que $\beta_q = \eta_q = 0$, la structure de connaissances probabiliste paramétrisée $(Q, \mathcal{K}, \pi, \beta, \eta)$ est dite *directe*. Donnons un exemple pour illustrer et justifier les notions définies ci-dessus.

Exemple 18. Soit $Q = \{a, b, c\}$ qui est l'ensemble des compétences. Disons ensuite que (pour des raisons de dépendance logique par exemple) tous les sous-ensembles de Q ne peuvent être des états de connaissance. Supposons que seuls quatre états de connaissance soient possibles, ceux-ci constituant la collection $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$. Pour rester en accord avec les observations pratiques, nous avons que les états de connaissance d'un étudiant varient dans la collection \mathcal{K} selon une certaine probabilité (inconnue). Celle-ci est notée π et nous avons donc les valeurs réelles $\pi(\emptyset)$, $\pi(\{a, b\})$, $\pi(\{a, c\})$ et $\pi(\{a, b, c\})$. De plus, il arrive qu'un étudiant inattentif réponde mal à une question concernant une compétence qu'il possède ou au contraire qu'un étudiant chanceux réponde correctement à une question concernant une compétence qu'il ne possède pas. Ceci justifie les probabilités

d'erreurs de distraction $\beta_a, \beta_b, \beta_c$ et les probabilités d'essais chanceux η_a, η_b, η_c .

Nous allons à présent décrire un modèle qui a été introduit par Doignon et Falmagne dans [6]. Mais auparavant rappelons qu'un *modèle (probabiliste)* $(\mathcal{D}, f, \mathcal{O})$ consiste en un domaine paramétrisé \mathcal{D} , un espace de faits \mathcal{O} et une fonction de prédiction $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{O}$. Ici $f(\mathcal{D})$ est appelé la *région de prédiction*. Le *Modèle de Réponse Correcte* (MRC) prédit pour toute structure de connaissances probabiliste paramétrisée $(Q, \mathcal{K}, \pi, \beta, \eta)$ la probabilité de répondre correctement à une question concernant une compétence q (pour un q fixé dans Q) comme étant

$$\rho(q) = (1 - \beta_q)\pi(\mathcal{K}_q) + \eta_q\pi(\mathcal{K}_{\bar{q}}), \quad (3.16)$$

avec les notations que $\mathcal{K}_q = \{K \in \mathcal{K} : q \in K\}$ et $\mathcal{K}_{\bar{q}} = \{K \in \mathcal{K} : q \notin K\}$. Précisons que dans $(Q, \mathcal{K}, \pi, \beta, \eta)$, \mathcal{K} est supposé connu, et que les paramètres proviennent de π, β et η . L'égalité (3.16) pour $\rho(q)$ provient de la formule des probabilités totales :

$$\rho(q) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \Pr(q|K)\pi(K).$$

Exemple 19. Si nous reprenons la situation décrite dans l'Exemple 18, nous avons par exemple que,

$$\begin{aligned} \rho(b) &= (1 - \beta_b)\pi(\{a, b\}) + (1 - \beta_b)\pi(\{a, b, c\}) + \eta_b\pi(\emptyset) + \eta_b\pi(\{a, c\}) \\ &= (1 - \beta_b)(\pi(\{a, b\}) + \pi(\{a, b, c\})) + \eta_b(\pi(\emptyset) + \pi(\{a, c\})). \end{aligned}$$

Notons qu'en pratique, il est plus intéressant de restreindre les β_q et les η_q à de petites valeurs ou même de les rendre nuls pour obtenir dans ce cas le modèle MRC direct.

Rappelons ici la terminologie classique utilisée pour les modèles probabilistes. Un modèle $(\mathcal{D}, f, \mathcal{O})$ est dit *testable* si $f(\mathcal{D}) \subsetneq \mathcal{O}$, le modèle sera dit *identifiable* si f est injective. Pour finir, nous dirons que le modèle $(\mathcal{D}, f, \mathcal{O})$ avec $\mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^n$ est *caractérisable* s'il existe une description explicite dans \mathbb{R}^n de la région de prédiction $f(\mathcal{D})$. Dans ce contexte une description explicite de $f(\mathcal{D})$ est un critère d'appartenance à $f(\mathcal{D})$ pour tout point p de l'espace de faits tel que ce critère n'est formulé qu'en terme du point p (donc sans référence à f).

Exemple 20. Soient $\mathcal{D} = [0, 1]^2$ et $\mathcal{O} = [0, 1]$. Prenons comme fonction de prédiction $f : [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1] : (t_1, t_2) \mapsto t_1(t_2 - \frac{1}{2})^2$. Dans ce cas, le modèle $(\mathcal{D}, f, \mathcal{O})$ est testable car $f(\mathcal{D}) = [0, \frac{1}{4}] \subsetneq [0, 1]$, mais pas identifiable car $f(0, 1) = f(0, 0) = 0$.

Formellement, le modèle MRC basé sur la structure de connaissances (Q, \mathcal{K}) possède

les paramètres suivants : la probabilité $\pi(K)$ pour tout $K \in \mathcal{K}$ et les probabilités β_q et η_q qui sont respectivement les probabilités d'erreurs de distractions et d'essais chanceux pour $q \in Q$. Donc le domaine paramétrisé de MRC est le produit d'un simplexe $\Lambda_{\mathcal{K}}$ (dont l'ensemble de sommets est \mathcal{K}) avec $2|Q|$ intervalles $[0, 1]$. L'espace de prédiction est $[0, 1]^Q$. Avec les notations précédentes nous avons que si

$$\rho(q) = \sum_{K \in \mathcal{K}} t(q, K) \pi(K) \quad \text{où } t(q, K) = \begin{cases} 1 - \beta_q & \text{si } q \in K \\ \eta_q & \text{si } q \notin K \end{cases}$$

alors la fonction de prédiction est

$$f : \Lambda_{\mathcal{K}} \times [0, 1]^Q \times [0, 1]^Q \rightarrow [0, 1]^Q : (\pi, \beta, \eta) \mapsto \rho. \quad (3.17)$$

Nous pouvons maintenant énoncer la proposition suivante pour le Modèle de Réponse Correcte direct. Notons que dans le cas direct, comme $\beta = \eta = 0$, une instance du modèle est décrite par $(\Lambda_{\mathcal{K}}, f, [0, 1]^Q)$.

Proposition 3.12. *Pour le Modèle de Réponse Correcte direct $(\Lambda_{\mathcal{K}}, f, [0, 1]^Q)$, la région de prédiction $f(\mathcal{D})$ est le polytope $P_{\mathcal{K}}$ dont les sommets sont les vecteurs caractéristiques des états dans \mathcal{K} .*

Démonstration. Par l'équation (3.17),

$$f : \Lambda_{\mathcal{K}} \rightarrow [0, 1]^Q : \pi \mapsto \rho \quad \text{avec } \rho(q) = \sum_{K \in \mathcal{K}} \pi(K).$$

La fonction f est en fait la restriction à un simplexe d'une fonction linéaire de $\mathbb{R}^{\mathcal{K}}$ dans \mathbb{R}^Q . Concrètement, f envoie les sommets de $\Lambda_{\mathcal{K}}$ sur certains sommets (distincts) du cube $[0, 1]^Q$. Effectivement, l'image d'un sommet K de $\Lambda_{\mathcal{K}}$ a comme coordonnées $\rho(q)$ pour $q \in Q$, égales à 1 si $q \in K$, et 0 sinon. Il en suit que la région de prédiction de MRC direct $(\Lambda_{\mathcal{K}}, f, [0, 1]^Q)$ est l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^Q des χ^K , pour tout K dans \mathcal{K} . \square

Exemple 21. Si nous avons $Q = \{a, b\}$ et $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Alors la fonction de prédiction f est surjective d'un simplexe de dimension trois sur un carré (rempli). Notons que le modèle n'est ni testable, ni identifiable.

Grâce à la Proposition 18 nous allons pouvoir énoncer le corollaire suivant dont la preuve est immédiate. Ce corollaire va nous permettre enfin de faire le lien avec la recherche d'une description linéaire des polytopes des faisables des antimatroïdes.

Corollaire 3.13. *Toute description linéaire de $P_{\mathcal{K}}$ nous donne une description de la région de prédiction du Modèle de Réponse Correcte direct $(\Lambda_{\mathcal{K}}, f, [0, 1]^Q)$.*

Il est à noter que d'un point de vue général, le problème d'obtenir une description linéaire d'un polytope à partir de son enveloppe convexe reste un problème difficile (voir [1] par exemple). Il existe cependant des cas facilement caractérisables provenant d'horizons divers comme l'optimisation combinatoire (les polytopes des indépendants d'un matroïde, voir [23]) ou encore dans les mathématiques appliquées à la psychologie (le polytope du choix multiple, voir [10] et [12]). De façon générale la difficulté d'obtenir une description linéaire pour un MRC est à traiter au cas par cas et il semble sans espoir d'obtenir une méthode générale pour trouver une telle description. Ce manque d'espoir est justifié par l'existence de polytopes dont l'obtention d'une description linéaire semble être hors de portée (le polytope d'ordonnancement linéaire, voir [7]). De plus, énormément de polytopes 0/1 sont obtenus comme $P_{\mathcal{K}}$ pour une certaine structure de connaissances (Q, \mathcal{K}) . D'où l'intérêt de se restreindre à une famille particulière des structures de connaissances : les espaces d'apprentissage. Il est immédiat que si nous nous restreignons aux polytopes $P_{\mathcal{L}}$ provenant d'un espace d'apprentissage (Q, \mathcal{L}) , la description linéaire de la région de prédiction du Modèle de Réponse Correcte direct reste difficile à obtenir en général. Cette description de la région de prédiction est exactement la description linéaire d'un polytope des faisables pour un certain antimatroïde. Ceci vient du fait que les conditions (3.14) et (3.15) pour les espaces d'apprentissages sont les mêmes que les axiomes (AM1) et (AM2) pour les antimatroïdes. Cela motive en partie notre recherche de description linéaire pour les polytopes des faisables associés aux antimatroïdes.

Chapitre 4

Énumération des antimatroïdes

Le but de ce chapitre est de fournir une liste d'exemples d'antimatroïdes et de voir ceux pour lesquels nous pouvons appliquer un des résultats du chapitre précédent. L'idée est alors d'observer, dans un premier temps, la liste des antimatroïdes sur trois éléments mais nous constaterons que celle-ci nous livre, au final, assez peu d'exemples intéressants. Dans un deuxième temps, nous nous intéresserons à l'ensemble des antimatroïdes sur quatre éléments et trierons ceux-ci dans certaines des familles définies dans la Section 2.2 dans le but de voir ceux pour lesquels nous sommes capables d'obtenir une description linéaire de leurs polytopes des faisables par les résultats du Chapitre 3.

Nous pouvons observer dans l'OEIS (On-Line Encyclopedia of Integer Sequences [25]), qu'Eppstein a développé un programme permettant de compter le nombre d'antimatroïdes sur n éléments. Malheureusement, même pour n petit, nous arrivons rapidement à un nombre d'objets très grand. Nous allons ici nous restreindre au comptage pour $n \leq 4$. Pour donner une idée de grandeur, le programme d'Eppstein nous donne en tout, 22 antimatroïdes sur trois éléments, 485 sur quatre éléments, et 59386 sur cinq éléments. Heureusement, nous ne devons pas considérer tous ces antimatroïdes ; expliquons de suite pourquoi.

4.1 Antimatroïdes sur trois éléments

Commençons par définir une notion assez classique en mathématique. Soient (E, \mathcal{F}) et (G, \mathcal{H}) deux antimatroïdes avec $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_k\}$ et $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_k\}$. Nous dirons que (E, \mathcal{F}) et (G, \mathcal{H}) sont *isomorphes* s'il existe une bijection $\phi : E \rightarrow G$ et une permutation σ de $\{1, \dots, k\}$ tels que $\phi(F_i) = H_{\sigma(i)}$, pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$. Cette notion est assez importante ici, car notre but est de trouver des exemples d'antimatroïdes et de donner

une description linéaire de leurs polytopes des faisables. Or, il est évident que si deux antimatroïdes sont isomorphes, la description linéaire du polytope des faisables de l'un mène directement à la description linéaire du polytope des faisables de l'autre par une simple affinité. Dans cette section, nous listons les antimatroïdes sur trois éléments pris à isomorphisme près.

Dans la suite, nous utilisons les notations suivantes : E_n représentera $\{1, 2, \dots, n\}$, \mathbb{A}_n sera l'ensemble des antimatroïdes sur n éléments, et \mathbb{A}_n^{iso} sera l'ensemble des antimatroïdes sur n éléments pris à isomorphisme près.

Notons que les ensembles \mathbb{A}_1 et \mathbb{A}_2 possèdent respectivement un et trois antimatroïdes. Nous n'allons pas nous attarder sur ceux-ci qui sont peu intéressants. L'ensemble \mathbb{A}_3 ne comportant que 22 antimatroïdes, il est aisé des les énumérer "à la main". Cette énumération, que nous n'allons pas recopier ici, est disponible via l'OEIS [25]. Par contre, nous donnons ci-dessous la liste des ensembles de faisables des six antimatroïdes à isomorphisme près :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{F}_3 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{F}_4 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{F}_5 &= \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\} \\ \mathcal{F}_6 &= 2^{E_3}\end{aligned}$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que tout antimatroïde sur trois éléments est isomorphe à un antimatroïde dont la famille des faisables est l'une des six listées ci-dessus.

Observons que les polytopes des faisables des antimatroïdes (E_3, \mathcal{F}_i) avec $i \in \{1, \dots, 6\} \setminus \{5\}$ sont facilement descriptibles en terme d'inégalités linéaires. Effectivement, il s'agit là de cinq antimatroïdes d'ordre. Donc, le Théorème 3.7 nous livre une description linéaire de leur polytopes des faisables. Pour ce qui est de (E_3, \mathcal{F}_5) , il s'agit d'un antimatroïde d'ordre double. Donc le Théorème 3.9 nous donne une description linéaire du polytope $P_{\mathcal{F}_5}$.

Pour des raisons évidentes, chacune des familles définies dans la section 2.2 est "close par isomorphisme". C'est-à-dire que deux antimatroïdes isomorphes appartiendront exactement aux même familles. En conclusion, nous possédons une description linéaire pour tous les polytopes des faisables des antimatroïdes sur trois éléments. Il serait utile d'obtenir des antimatroïdes qui n'entrent pas dans le cadre des résultats du chapitre précédent, c'est pourquoi nous allons aborder à présent les antimatroïdes sur quatre

éléments.

4.2 Antimatroïdes sur quatre éléments

Comme annoncé précédemment, Eppstein a montré que l'ensemble \mathbb{A}_4 contient 485 antimatroïdes. Les lister tous serait fastidieux et dans notre cas, peu intéressant. Par contre, nous pouvons les énumérer à isomorphisme près pour simplifier leur étude. Nous allons à présent compter le nombre d'éléments de \mathbb{A}_4^{iso} , ensuite nous donnerons la liste de ceux-ci. Au commencement de ce travail, nous n'avons pas trouvé de trace d'une telle énumération dans la littérature. Comme nous le verrons, nous sommes arrivés à 34 éléments dans \mathbb{A}_4^{iso} . Depuis, l'OEIS a confirmé la valeur 34 suite au travail de Przemysław Uznański.

Introduisons des invariants dans le but de montrer l'inexistence d'isomorphismes entre certains antimatroïdes. Nous définissons donc les invariants suivants pour un antimatroïde $M = (E, \mathcal{F})$:

- (i) $\alpha_i(M)$ est le nombre de faisables formés d'exactly i éléments.
- (ii) $\beta(M)$ est la famille des $\beta_e = |\{F \in \mathcal{F} : e \in F\}|$ pour tout e dans E .

Notre but est maintenant de calculer $|\mathbb{A}_4^{iso}|$, pour cela nous partitionnons \mathbb{A}_4 en quatre sous-ensembles que nous observerons un à un. Cette partition est construite sur base du nombre de singletons que possèdent les antimatroïdes \mathbb{A}_4 . Plus précisément, les classes de la partition sont composées des ensembles suivants : $\{M \in \mathbb{A}_4 : \alpha_1(M) = 1\}$, $\{M \in \mathbb{A}_4 : \alpha_1(M) = 2\}$, $\{M \in \mathbb{A}_4 : \alpha_1(M) = 3\}$ et $\{M \in \mathbb{A}_4 : \alpha_1(M) = 4\}$. Ensuite nous comptons dans chacun de ces ensembles le nombre d'antimatroïdes à isomorphisme près. Nous commençons par le cas de l'ensemble $\{M \in \mathbb{A}_4 : \alpha_1(M) = 1\}$, grâce à une proposition générale sur le nombre d'antimatroïdes sur n éléments qui ne possèdent qu'un seul singleton.

Proposition 4.1. *Le nombre exact d'antimatroïdes sur n éléments ne possédant qu'un seul singleton est égal à $n|\mathbb{A}_{n-1}|$. De plus, les n antimatroïdes sur E_n que nous associons à un même antimatroïde sur E_{n-1} sont tous isomorphes.*

Démonstration. Dans un premier temps, montrons que pour chaque élément de \mathbb{A}_n tel que $\alpha_1(M) = 1$, nous pouvons obtenir un antimatroïde de \mathbb{A}_{n-1} . L'idée est de retirer l'élément du singleton de tous les faisables. De manière formelle : soit $(E_n, \mathcal{F}) \in \mathbb{A}_n$, où

$\{i\} \in \mathcal{F}$ est l'unique singleton. Alors $(E_{n-1}, \mathcal{F}') \in \mathbb{A}_{n-1}$, où

$$\mathcal{F}' = \{\sigma(S \setminus \{i\}) : S \in \mathcal{F}\},$$

σ_i est la permutation (n, i) .

Comme l'élément i est présent dans tous les faisables non vides (par (AM2)), \mathcal{F} détermine bien un antimatroïde sur $n - 1$ éléments. Effectivement, (E_{n-1}, \mathcal{F}') respecte bien les propriétés (AM1) et (AM2) des antimatroïdes, car (E_n, \mathcal{F}) les respectait.

Ensuite montrons à partir de chaque élément de \mathbb{A}_{n-1} que nous pouvons obtenir n éléments de \mathbb{A}_n tel que $\alpha_1(M) = 1$. L'idée est d'ajouter un nouvel élément à tous les faisables. De manière formelle : soit $(E_{n-1}, \mathcal{F}) \in \mathbb{A}_{n-1}$. Alors $(E_n, \widetilde{\mathcal{F}}_i) \in \mathbb{A}_n$, pour tout $i \in E_n$ avec

$$\widetilde{\mathcal{F}}_i = \{\sigma(S \cup \{n\}) : S \in \mathcal{F}\} \cup \{\emptyset\},$$

σ_i est la permutation (n, i) ,

ne possède qu'un seul singleton. Comme un nouvel élément est ajouté dans tous les faisables, nous obtenons un antimatroïde sur n éléments. Effectivement, $(E_n, \widetilde{\mathcal{F}}_i)$ respecte bien les propriétés (AM1) et (AM2) des antimatroïdes, car (E_{n-1}, \mathcal{F}) les respectait.

Nous avons donc bien une correspondance $1 - n$ entre les éléments de \mathbb{A}_n ne possédant qu'un singleton et les éléments de \mathbb{A}_{n-1} . □

En nous basant sur la Proposition 4.1 et sa preuve, nous déduisons le corollaire suivant :

Corollaire 4.2. *Le nombre d'éléments dans \mathbb{A}_n^{iso} ne possédant qu'un seul singleton est égal à $|\mathbb{A}_{n-1}^{iso}|$.*

Pour ce qui est du nombre de $M \in \mathbb{A}_4^{iso}$ avec $\alpha_1(M) = 2$, les choses se corsent un peu. Par souci de clarté, nous allons baser notre comptage sur plusieurs lemmes, chacun de ceux-ci sera destiné à vérifier une partie du Tableau 4.1

Nous nous référerons à une colonne de ce tableau en indiquant la valeur de $\alpha_2(M)$. Comme nous travaillons à isomorphisme près, nous allons fixer dans les lemmes suivants les deux singletons que possèdent les antimatroïdes M tels que $\alpha_1(M) = 2$. Sans restreindre la généralité, prenons comme singletons $\{1\}$ et $\{2\}$. Ceci implique que $\{1, 2\}$ est un faisable (par (AM1)), mais pas $\{3, 4\}$ (par (AM2)).

Lemme 4.3. *Chaque cellule des colonnes 1, 4, 5 et 6 indique le nombre d'antimatroïdes à isomorphisme près qui ont les valeurs correspondantes pour α_2 et α_3 .*

$\alpha_3 \backslash \alpha_2$	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	0	0	0
2	1	2	3	0	0	0
3	0	1	4	1	0	0
4	0	0	2	1	1	0

TABLE 4.1 – Tableau du comptage des $M \in \mathbb{A}_4^{iso}$ avec $\alpha_1(M) = 2$.

Démonstration. Pour la colonne 1, nous n'avons qu'une seule paire faisable (donc $\{1, 2\}$), et par (AM2) nous ne pouvons choisir comme trio faisable que ceux comprenant $\{1, 2\}$ (il y en a deux). Si nous n'en prenons qu'un, peu importe celui que nous choisissons, la permutation $\sigma = (3, 4)$ nous montre que les deux antimatroïdes obtenus sont isomorphes. Si nous prenons les deux tris autorisés, nous n'obtenons qu'un seul antimatroïde.

Pour la colonne 4, nous avons trois paires en plus de celle imposée. Il nous faut donc choisir deux paires qui ne seront pas faisables. Comme vu plus haut, $\{3, 4\}$ doit être écartée. Ensuite, il n'est pas restrictif de supposer que la deuxième paire écartée est $\{2, 4\}$. Alors, (AM1) impose au moins trois tris faisables ($\{2, 3, 4\}$ n'est pas imposé). Donc, que nous prenons trois ou quatre tris comme faisables, nous obtenons à chaque fois qu'un seul antimatroïde à isomorphisme près.

Pour la colonne 5, nous avons toutes les cinq paires faisables permises, ce qui implique par (AM1) que nous avons aussi tous les tris comme faisables. Ceci ne nous laisse pas le choix et nous donne un antimatroïde unique.

Pour la colonne 6, comme dit précédemment, nous ne pouvons pas prendre la paire $\{3, 4\}$ comme faisable, ce qui rend impossible la construction d'un antimatroïde sur 4 éléments possédant exactement 2 singletons mais 6 paires dans ses faisables. \square

Lemme 4.4. *Chaque cellule de la colonne 2 indique le nombre d'antimatroïdes à isomorphisme près qui ont les valeurs correspondantes pour α_2 et α_3 .*

Démonstration. Pour la colonne 2, nous avons une paire en plus de celle imposée, par (AM2). Il n'est pas restrictif de supposer que celle-ci est $\{1, 3\}$. Ceci implique que nous avons un trio imposé comme faisable : $\{1, 2, 3\}$ et un trio qui ne le sera jamais : $\{2, 3, 4\}$. Si nous voulons prendre zéro ou deux tris supplémentaires, alors il n'y a pas de choix à faire et les antimatroïdes obtenus sont uniques. Si maintenant nous voulons prendre un seul trio supplémentaire, nous pouvons soit prendre $\{1, 2, 3\}$, soit $\{1, 3, 4\}$. Les deux antimatroïdes ainsi obtenus ne sont pas isomorphes, cela se vérifie rapidement avec l'invariant β . \square

Lemme 4.5. *Chaque cellule de la colonne 3 indique le nombre d'antimatroïdes à isomorphisme près qui ont les valeurs correspondantes pour α_2 et α_3 .*

Démonstration. nous avons deux paires en plus de celle imposée, il existe plusieurs cas :

- L'intersection de ces deux paires est un singleton faisable. Il n'est pas restrictif de supposer que celles-ci sont $\{1, 3\}$ et $\{1, 4\}$. Dans ce cas, (AM2) impose que le trio $\{2, 3, 4\}$ ne soit jamais faisable, mais que tous les autres le soient obligatoirement. L'antimatroïde de cette forme est donc unique.
- Les paires ont une intersection vide entre elles. Il n'est pas restrictif de supposer que celles-ci sont $\{1, 3\}$ et $\{2, 4\}$. Dans ce cas, (AM1) impose deux trios faisables : $\{1, 2, 3\}$ et $\{1, 2, 4\}$. Si nous prenons zéro, un ou deux trios supplémentaires, l'antimatroïde obtenu est unique.
- L'intersection de ces deux paires est un singleton non faisable. Il n'est pas restrictif de supposer que celles-ci sont $\{1, 3\}$ et $\{2, 3\}$. Dans ce cas, (AM1) impose $\{1, 2, 3\}$ comme faisable. Si nous prenons zéro ou trois trios supplémentaires, alors l'antimatroïde obtenu est unique. Si nous voulons prendre un trio supplémentaire nous devons choisir de prendre le trio $\{1, 2, 4\}$ ou pas. Si nous le prenons, alors l'antimatroïde obtenu n'est pas isomorphe à celui obtenu en ne le sélectionnant pas (cela se voit avec l'invariant β). Si nous ne prenons pas $\{1, 2, 4\}$, nous avons deux possibilités pour le trio à choisir, mais peu importe ce choix, la permutation $\sigma = (1, 2)$ nous montre que les antimatroïdes obtenus sont isomorphes. Un raisonnement similaire montre que si nous voulons prendre deux trios supplémentaires, nous pouvons choisir de prendre $\{1, 2, 4\}$ et un autre trio (peut importe cet autre trio, les deux antimatroïdes obtenus seront isomorphes), si nous ne sélectionnons pas $\{1, 2, 4\}$, alors l'antimatroïde obtenu est unique.

□

Proposition 4.6. *Il existe 19 antimatroïdes sur 4 éléments à isomorphisme près possédant exactement deux singletons faisables.*

Démonstration. Il nous suffit de sommer les nombres apparaissant dans le Tableau 4.1 pour obtenir 19. □

Nous pouvons à présent passer au nombre de $M \in \mathbb{A}_4^{iso}$ avec $\alpha_1(M) = 3$, nous nous baserons sur un tableau semblable à celui du cas précédent, le Tableau 4.2.

Lemme 4.7. *Il existe 8 antimatroïdes sur 4 éléments à isomorphisme près possédant exactement trois singletons faisables.*

$\alpha_3 \backslash \alpha_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	0	1	0	0	0
2	0	0	1	0	0	0
3	0	0	1	1	0	0
4	0	0	1	1	1	1

TABLE 4.2 – Tableau du comptage des $M \in \mathbb{A}_4^{iso}$ avec $\alpha_1(M) = 3$.

Démonstration. Vérifions que le Tableau 4.2 est correct. Comme la somme de ses valeurs nous donne bien 8, le lemme sera vérifié en même temps. Comme nous travaillons à isomorphisme près, nous pouvons travailler sur les éléments de \mathbb{A}_4 possédant exactement trois singletons que nous avons nous-même fixés. Sans restreindre la généralité, disons que ceux-ci sont $\{1\}$, $\{2\}$ et $\{3\}$. Ceci implique que 2^{E_3} sera compris dans l'ensemble de leurs faisables (par (AM1)), et donc les colonnes 1 et 2 sont déjà vérifiées.

Pour la colonne 3, nous avons trois paires et un trio faisables qui sont imposés (à savoir $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$ et $\{1, 2, 3\}$), nous pouvons alors choisir de prendre comme autres faisables entre zéro et trois trios supplémentaires. Si nous en prenons zéro ou trois, les antimatroïdes obtenus sont uniques. Si nous n'en prenons qu'un, peu importe le choix de celui-ci, les antimatroïdes résultants seront isomorphes. Pour le vérifier, il suffit d'appliquer une des deux permutations suivantes $\sigma = (1, 2, 3)$ ou $\sigma^2 = (1, 3, 2)$ selon les cas. Un raisonnement pareil montre l'isomorphisme dans le cas où nous prenons deux trios faisables supplémentaires.

Pour la colonne 4, nous avons une paire en plus des trois imposées. Il n'est pas restrictif de supposer que celle-ci soit $\{1, 4\}$. Par (AM1) l'ensemble des faisables doit contenir au moins trois trios. Nous pouvons choisir de prendre le quatrième trio ou non, dans les deux cas l'antimatroïde obtenu sera unique.

Les résultats pour la colonne 5 et 6 sont triviaux. □

Nous avons donc tous les éléments en notre possession pour affirmer le théorème suivant :

Théorème 4.8. *L'ensemble \mathbb{A}_4^{iso} possède 34 éléments.*

Démonstration. Pour cela, il nous faut d'abord utiliser le corollaire 4.2 avec $n = 4$, nous obtenons 6 éléments de \mathbb{A}_4^{iso} avec un unique singleton. La proposition 4.6 nous en donne 19 avec exactement deux singletons et le lemme 4.7 nous en donne 8 avec exactement trois singletons. Rajoutons l'unique antimatroïde sur 4 éléments possédant quatre singletons : $(E_4, 2^{E_4})$. Nous avons bien $6 + 19 + 8 + 1 = 34$. □

Nous pouvons grâce au travail effectué ci-dessus, dresser la liste des trente-quatre ensembles de faisables possibles pour former un antimatroïde sur E_4 à isomorphisme près. Cette liste est fournie en annexe. Il est intéressant de voir que sur ces 34 antimatroïdes (E_4, \mathcal{F}) , nous possédons une description linéaire de $P_{\mathcal{F}}$ pour 21 d'entre-eux. Le chapitre suivant est consacré à une partie des 13 autres antimatroïdes.

Chapitre 5

Nouveaux résultats sur les polytopes d'antimatroïdes

Nous avons à présent une liste d'exemples d'antimatroïdes sur quatre éléments (fournie en annexe) et nous constatons que certains de ceux-ci ne rentrent dans aucune des familles pour lesquelles nous connaissons une description linéaire du polytope des faisables. Ceci nous conduit à définir de nouvelles familles d'antimatroïdes pour lesquelles nous donnerons des descriptions linéaires de leurs polytopes des faisables, descriptions, qui à notre connaissance, sont originales.

Premièrement, nous étudierons certains antimatroïdes dont le polytope des faisables est une pyramide et dont la description de celle-ci peut s'obtenir facilement via la description d'un polytope des faisables de dimension inférieure. Ensuite, nous définirons la famille des antimatroïdes d'ordre augmenté, nous donnerons quelques propriétés combinatoires et pour finir une description linéaire de leurs polytopes des faisables.

5.1 Antimatroïdes aux polytopes pyramidaux

Certains antimatroïdes possèdent un polytope des faisables prenant la forme d'une *pyramide*, c'est-à-dire un polytope de dimension n égale à l'enveloppe convexe d'un polytope de dimension $n - 1$, appelé *base de la pyramide* et d'un point, nommé *apex*, extérieur à l'espace affín engendré par la base. Ces antimatroïdes ont des polytopes des faisables faciles à décrire en termes d'inégalités pour peu que nous possédions la description de la base de la pyramide. Encore faut-il savoir quels antimatroïdes possèdent un polytope des faisables qui soit une pyramide.

Nous présentons ici deux familles d'antimatroïdes dont nous montrons qu'ils possèdent

un polytope des faisables qui est une pyramide dont la base est elle-même un polytope des faisables pour un certain antimatroïde et de dimension inférieure. Nous donnons également une méthode pour obtenir la description en termes d'inégalités à partir des équations définissant la base de la pyramide.

Rappelons un résultat sur les pyramides. Ce lemme n'est pas donné dans sa forme la plus générale, mais cette formulation convient à nos besoins futurs.

Lemme 5.1. *Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ une pyramide de base B comprise dans l'hyperplan $x_k = \beta$, et d'apex $a = (a_1, \dots, a_n)$. Alors si $f(x) \geq \gamma$ définit une facette de B (vu comme polytope dans \mathbb{R}^{n-1} , f est donc une forme linéaire sur l'hyperplan d'équation $x_k = \beta$), l'inégalité*

$$\tilde{f}(x) - \frac{\tilde{f}(a) - \gamma}{\beta - a_k}(\beta - x_k) \geq \gamma, \quad (5.1)$$

définit une facette de P , où $\tilde{f}(x)$ est l'extension naturelle $\tilde{f}(x) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f((x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n))$. De plus, toutes les facettes de P sauf une (qui est soit $x_k \geq \beta$, soit $x_k \leq \beta$) sont obtenues de cette manière.

Démonstration. Notons que par définition d'une pyramide nous avons $a_k \neq \beta$. Soit $f(x) \geq \gamma$ une facette de B , alors (5.1) est valide pour tous les sommets de P (pour ceux compris dans B , son deuxième terme est nul et pour a , nous pouvons simplifier l'expression en $\gamma \geq \gamma$). Notons que nous avons déjà $n - 1$ sommets affinement indépendants de P qui vérifient (5.1) à l'égalité (à savoir les $n - 1$ sommets de B qui la vérifiaient $f(x) \geq \gamma$ à l'égalité). Et nous avons aussi le point a qui vérifie également (5.1) à l'égalité. Celui-ci n'étant pas dans l'hyperplan $x_k = \beta$ (contrairement aux sommets de B) nous avons bien n sommets affinement indépendants.

De plus, toute facette de P doit contenir n sommets indépendants. Parmi ceux-ci soit $n - 1$ se trouvent dans B (et donc sur facette de B parce qu'ils doivent engendrer affinement un hyperplan valide pour P donc en particulier pour B) et le dernier sommet est a . Dans ce cas nous obtenons une facette du type de (5.1) ou bien, les n sommets appartiennent tous à B , donc la facette en question doit contenir B et elle sera définie par $x_k \geq \beta$ ou par $x_k \leq \beta$ selon que a_k soit plus grand que β ou plus petit que β . \square

Dans un premier temps, mettons en évidence des antimatroïdes qui possèdent un polytope des faisables qui est une pyramide dont l'apex est χ^E .

Proposition 5.2. *Soit (E, \mathcal{F}) un antimatroïde. Supposons qu'il existe un élément a dans E tel que $(E \setminus \{a\}, \mathcal{F} \setminus \{E\})$ soit encore un antimatroïde. Alors $P_{\mathcal{F}}$ est une pyramide, dont la base est $P_{\mathcal{F} \setminus \{E\}}$ et l'apex χ^E .*

Démonstration. Vérifions rapidement que nous avons bien une pyramide comme polytope des faisables. Tout point de $P_{\mathcal{F}\setminus\{E\}}$ se trouve dans l'hyperplan $x_a = 0$ par définition. De plus χ^E n'appartient pas à cet hyperplan, donc $P_{\mathcal{F}}$ est bien une pyramide. \square

Grâce au Lemme 5.1, nous pouvons déduire toutes les facettes de $P_{\mathcal{F}}$, si nous connaissons une description linéaire de $P_{\mathcal{F}\cup E}$. Nous pouvons illustrer ceci par l'exemple suivant, avec à nouveau $E_n = \{1 \dots, n\}$.

Exemple 22. Soit l'antimatroïde (E_4, \mathcal{F}) , avec $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, E_4\}$. Son polytope des faisables est bien une pyramide d'apex χ^{E_4} , car $(E_3, \mathcal{F}\setminus\{E_4\})$ est aussi un antimatroïde. La Figure 5.1 illustre $P_{\mathcal{F}\setminus\{E_4\}}$ qui est la base de la pyramide $P_{\mathcal{F}}$, ainsi que le diagramme de Schlegel de $P_{\mathcal{F}}$ (projection sur la facette définie par $x_4 = 0$). Notons que le polytope $P_{\mathcal{F}\setminus\{E_4\}}$ peut être aisément décrit du fait qu'il provient d'un antimatroïde d'ordre double.

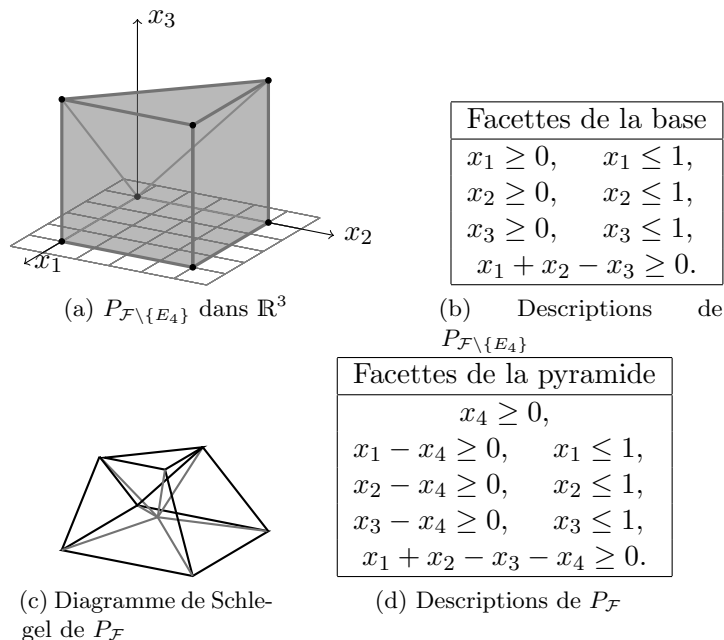


FIGURE 5.1 – Illustration d'un polytope des faisables qui est une pyramide d'apex χ^E .

A présent, mettons en évidence des antimatroïdes qui possèdent un polytope des faisables qui est une pyramide dont l'apex est χ^\emptyset .

Proposition 5.3. Soit (E, \mathcal{F}) un antimatroïde qui ne possède qu'un seul singleton faisable. Soit $\{a\} \in \mathcal{F}$, alors $P_{\mathcal{F}}$ est une pyramide dont la base est le polytope des faisables de l'antimatroïde $(E\setminus\{a\}, \text{Tr}(\mathcal{F}, E\setminus\{a\}))$ et d'apex χ^\emptyset .

Démonstration. Nous rappelons que par la Proposition 2.3, nous avons bien que $(E \setminus \{a\}, \text{Tr}(\mathcal{F}, E \setminus \{a\}))$ est un antimatroïde. Vérifions rapidement que nous avons bien une pyramide comme polytope des faisables. Tout sommet de $P_{\mathcal{F}}$ (sauf χ^{\emptyset}) se trouve dans l'hyperplan $x_a = 1$. Effectivement, $a \in F$, pour tout $F \in \mathcal{F} \setminus \{\emptyset\}$ (car $\{a\}$ est le seul singleton faisable et tout F dans \mathcal{F} doit satisfaire la condition d'accessibilité). De plus χ^{\emptyset} n'appartient pas à cet hyperplan, donc $P_{\mathcal{F}}$ est bien une pyramide. Les sommets de la base sont les vecteurs caractéristiques des F non vides dans \mathcal{F} . Comme tous les faisables non vides contiennent a , il en suit que l'intersection entre $P_{\mathcal{F}}$ et l'hyperplan $x_a = 1$ est isomorphe au polytope des faisables de $(E \setminus \{a\}, \text{Tr}(\mathcal{F}, E \setminus \{a\}))$. \square

Illustrons cette proposition par l'exemple suivant :

Exemple 23. Soit l'antimatroïde (E_4, \mathcal{F}) , avec $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, E_4\}$. Son polytope des faisables est bien une pyramide d'apex \emptyset , et $(\{2, 3, 4\}, \mathcal{F}')$ avec $\mathcal{F}' = \{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}\}$ est aussi un antimatroïde. La Figure 5.13 illustre $P_{\mathcal{F}'}$ qui est la base de la pyramide $P_{\mathcal{F}}$, ainsi que le diagramme de Schlegel de $P_{\mathcal{F}}$ (projection sur la facette définie par $x_4 = 0$). Notons que le polytope $P_{\mathcal{F}}$ peut être aisément décrit du fait qu'il provient d'un antimatroïde d'ordre double.

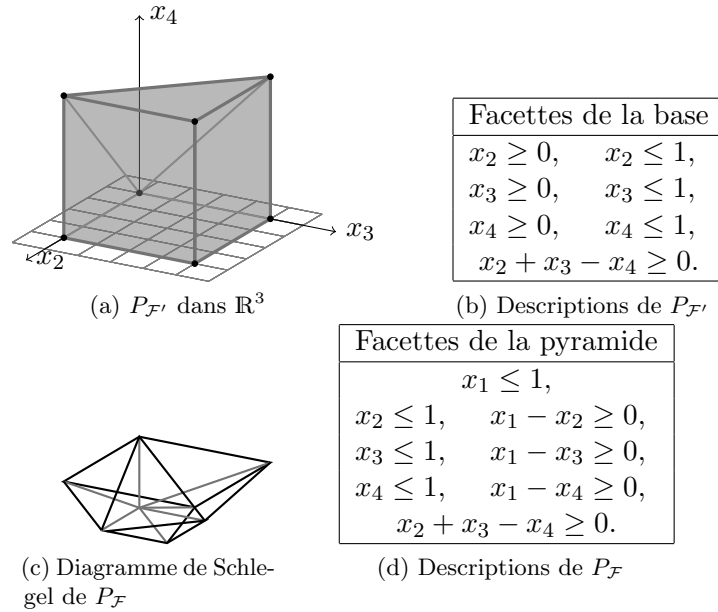


FIGURE 5.2 – Illustration d'un polytope des faisables qui est une pyramide d'apex χ^{\emptyset} .

En résumé, le but des Propositions 5.2 et 5.3 est d'utiliser la description linéaire de

polytopes des faisables d'antimatroïdes avec un élément de moins pour obtenir la description linéaire de nouveaux polytopes des faisables. Effectivement, si ces antimatroïdes avec moins d'éléments entrent dans le cadre des résultats du Chapitre 3, alors nous obtenons directement une description linéaire de la pyramide. Dans les Exemples 5.1 et 5.13 nous avons observé des antimatroïdes auxquels ne s'applique aucune des propositions du Chapitre 3. Ceux-ci possédaient une pyramide comme polytope des faisables, dont les bases sont le polytope des faisables d'un antimatroïde d'ordre (donc sa description linéaire était connue).

5.2 Antimatroïdes d'ordre augmenté : aspect combinatoire

Nous allons dans cette section décrire et étudier une nouvelle famille d'antimatroïdes. Pour définir celle-ci, partons d'un ensemble ordonné (E, \leq) , ce qui nous donne naturellement un antimatroïde d'ordre (E, \mathcal{F}) . Nous dirons qu'un antimatroïde est un *antimatroïde d'ordre augmenté* s'il est un antimatroïde d'ordre auquel on a ajouté un seul nouvel ensemble faisable. C'est-à-dire, un antimatroïde du type $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ avec $R \in 2^E \setminus \mathcal{F}$ et (E, \mathcal{F}) un antimatroïde d'ordre.

La famille des antimatroïdes d'ordre augmenté est intéressante d'une part, parce qu'elle comprend un bon nombre d'antimatroïdes et d'autre part, leurs polytopes des faisables peuvent s'obtenir sans trop de difficultés, comme nous allons le montrer. Remarquons que, parmi les antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près qui sont au nombre de 34 (voir section 4.2 et l'appendice), 17 sont des antimatroïde d'ordre augmenté et parmi ceux-ci, 6 échappaient encore à la classification de Korte et Lovász [18] (c.-à-d. leurs polytopes n'avaient pas été décrits). Nous allons d'abord énoncer et démontrer quelques propositions à propos de cette nouvelle famille, ensuite nous examinerons les polytopes des faisables de celle-ci et pour finir, nous illustrerons tout cela par des exemples.

Comme vu précédemment, les ensembles faisables d'un antimatroïde d'ordre peuvent être représentés à l'aide du diagramme de Hasse de l'ensemble ordonné sous-jacent. Pour représenter les antimatroïdes d'ordre augmenté $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$, il suffit d'utiliser le diagramme de Hasse de l'ordre dont est déduit (E, \mathcal{F}) et d'y ajouter un ensemble R . Pour une meilleure visualisation, nous donnons l'exemple concret suivant.

Exemple 24. Prenons (E, \mathcal{F}) l'antimatroïde d'ordre basé sur le diagramme de Hasse représenté par la Figure 5.3a. L'ajout de $R = \{1, 2, 5\}$ à la famille \mathcal{F} nous livre un nouvel antimatroïde $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$. Nous vérifions facilement que R n'est pas un idéal (donc $\mathcal{F} \neq \mathcal{F} \cup \{R\}$) et que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ est bien un antimatroïde. Celui-ci est représenté par la Figure 5.3b.

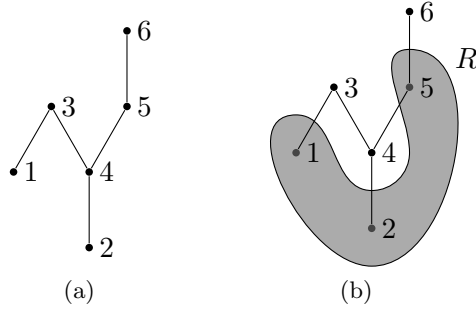


FIGURE 5.3 – Représentation d’un antimatroïde d’ordre et d’un antimatroïde d’ordre augmenté.

Donnons à présent une condition nécessaire et suffisante sur l’ensemble R à ajouter aux faisables pour que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit encore un antimatroïde.

Proposition 5.4. *Soient (E, \mathcal{F}) un antimatroïde d’ordre et $R \in 2^E \setminus \mathcal{F}$. Alors $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ est un antimatroïde si et seulement si il existe deux éléments a et b de E tel que b couvre a et $R^c = \text{ft}(a) \setminus \{b\}$. De plus a et b sont uniques.*

Démonstration. Remarquons d’abord que la condition $R^c = \text{ft}(a) \setminus \{b\}$ est équivalente à demander que b soit le seul élément de R tel que à la fois $a < b$ et, pour tout $f \notin R$, $a \in \text{idl}(f)$. Utilisons ceci pour montrer la condition nécessaire. Supposons que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde. Comme R n’est pas un idéal, prenons $a \notin R$ et $b \in R$ avec b qui couvre a . Si nous avons $b \neq b'$ deux éléments de R , avec $a < b$ et $a < b'$, alors il n’existerait pas d’élément $r \in R$ tel que $R \setminus \{r\} \in \mathcal{F} \cup \{R\}$. Effectivement, $R \setminus \{r\} \neq R$ et $R \setminus \{r\}$ n’appartient pas à \mathcal{F} car il contient soit b , soit b' mais pas a . Il y a donc contradiction avec l’accessibilité. De plus, si nous avons un $f \notin R$ tel que $a \notin \text{idl}(f)$, alors $\text{idl}(f) \cup R \neq R$ et $\text{idl}(f) \cup R \notin \mathcal{F}$ car cet ensemble contient b mais pas a . Cela contredirait la stabilité par réunion des faisables de $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$.

Pour la condition suffisante, supposons $R^c = \text{ft}(a) \setminus \{b\}$. Pour montrer que $\mathcal{F} \cup \{R\}$ est stable par réunion, il suffit d’établir que la réunion avec R d’un élément F de \mathcal{F} est dans $\mathcal{F} \cup \{R\}$ (car \mathcal{F} est stable par réunion). Ici, F est un idéal de (E, \leq) . Supposons $f_1 \leq f_2$ et $f_2 \in F \cup R$. Alors $f_1 \in F$ si $f_2 \in F$ et $f_1 \in R$ si $f_2 \in R \setminus \{b\}$. Enfin, si $f_2 = b$, notons que $F \cup R = R$ sauf si $F \setminus R = \emptyset$, auquel cas nécessairement $a \in F$. Nous avons établi que soit $F \cup R$ était un idéal de (E, \leq) (donc appartient à \mathcal{F}), soit $F \cup R = R$. Vérifions ensuite l’accessibilité en montrant d’abord que $R \setminus \{b\} \in \mathcal{F}$. Mais $R \setminus \{b\} = \text{ft}(a)^c$ et le complément d’un convexe est un faisable. Enfin, pour les éléments de \mathcal{F} (qui sont tous des idéaux de \leq), l’accessibilité reste clairement vérifiée.

De plus, nous avons bien que a et b sont uniques, car ils sont complètement déterminés par R . □

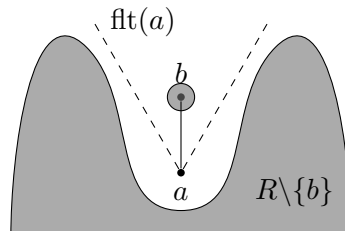


FIGURE 5.4

Un exemple schématique de l'ensemble R^{\complement} est donné par la Figure 5.4. La proposition précédente nous montre que pour n'importe quel antimatroïde d'ordre augmenté, nous avons deux éléments a et b de l'ensemble E qui jouent un rôle particulier. Ils vérifient $R^{\complement} = \text{flt}(a) \setminus \{b\}$ et $a \prec b$. Dans la suite de cette section, quand nous parlerons d'antimatroïdes d'ordre augmenté, les lettres a et b désigneront toujours ces éléments qui livrent le faisable R .

Si nous reprenons l'antimatroïde d'ordre augmenté de l'Exemple 24, nous avons $a = 4$ et $b = 5$. Remarquons que si nous avons pris $R = \{2, 5\}$, alors nous n'aurions pas eu la stabilité par réunion (car $R \cup \{1\} \notin \mathcal{F} \cup \{R\}$). Et si nous avons pris $R = \{1, 2, 5, 6\}$, nous n'aurions pas eu la condition d'accessibilité.

Comme vu précédemment, la famille des antimatroïdes d'ordre augmenté comprend de nombreux antimatroïdes, parmi ceux-ci certains restent encore des antimatroïdes d'ordre. Ce cas n'est pas intéressant. Par contre, il existe des cas d'antimatroïdes d'ordre augmenté qui ne sont pas des antimatroïdes d'ordre. Nous donnons ici une condition nécessaire et suffisante sur l'ensemble R qui permettra de savoir quand cette situation se présente.

Proposition 5.5. *Soit $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ un antimatroïde d'ordre augmenté avec $R = \text{flt}(a)^{\complement} \cup \{b\}$ et $a \prec b$. Celui-ci est un antimatroïde d'ordre si et seulement si $R = \text{idl}(b) \setminus \{a\}$.*

Démonstration. Supposons que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre. Par la Proposition 5.4 et sa preuve, nous avons déjà $R \supseteq \text{idl}(b) \setminus \{a\}$. Pour montrer l'inclusion dans l'autre sens, supposons qu'il existe un élément $r \in R$ avec $r \notin \text{idl}(b) \setminus \{a\}$. Montrons que dans ce cas, $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ possède un circuit de cardinalité 3. Par le théorème 2.8, cela contredirait le fait qu'il soit un antimatroïde d'ordre. Montrons que $(\{a, r\}, b)$ est un circuit. Observons d'abord les propriétés suivantes des éléments a , b et r . Nous savons

déjà que $a < b$ et $a \notin R$. De plus $r \notin \text{idl}(a)$ car sinon $r \in \text{idl}(b)$ aussi. Et pour finir, $b \notin \text{idl}(r)$ car, par la Proposition 5.4, il ne peut pas y avoir d'élément de R autre que b qui soit plus grand que a . Tout ceci combiné, nous donne les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \{a, b, r\} \cap \text{idl}(a) &= \{a\}, \\ \{a, b, r\} \cap \text{idl}(r) &= \{r\}, \\ \{a, b, r\} \cap R &= \{b, r\}, \\ \{a, b, r\} \cap \text{idl}(b) &= \{a, b\}, \\ \{a, b, r\} \cap (\text{idl}(a, r)) &= \{a, r\}, \\ \{a, b, r\} \cap E &= \{a, b, r\}. \end{aligned}$$

Pour finir, vérifions également qu'il n'existe pas de faisable F tel que $\{a, b, r\} \cap F = \{b\}$. Ceci est vrai car tous les faisables qui contiennent b , contiennent a , sauf R , mais ce dernier contient r . Par la Proposition 2.6, nous avons bien le circuit $(\{a, r\}, b)$.

Pour la condition suffisante, partons de $R = \text{idl}(b) \setminus \{a\}$ et construisons un nouvel ensemble ordonné (E, \leq_2) tel que l'ensemble \mathcal{F}_2 des idéaux de celui-ci soit égal à $\mathcal{F} \cup \{R\}$. Pour construire ce nouvel ordre, définissons la relation \leq_2 comme étant formée de tous les couples (e, e') qui vérifient $e \leq e'$ excepté le couple (a, b) . Montrons que $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F} \cup \{R\}$. Pour l'inclusion de gauche à droite, remarquons que pour tout $e \in E$,

$$\text{idl}_{\leq_2}(e) = \begin{cases} R & \text{si } e = b \\ \text{idl}_{\leq}(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

Et comme tout idéal est la réunion d'idéaux principaux, ceci montre $\mathcal{F}_2 \subseteq \mathcal{F} \cup \{R\}$. Pour l'inclusion de droite à gauche, clairement tout idéal de \leq_1 est aussi idéal de \leq_2 et R est idéal de \leq_2 donc $\mathcal{F}_2 \supseteq \mathcal{F} \cup \{R\}$. \square

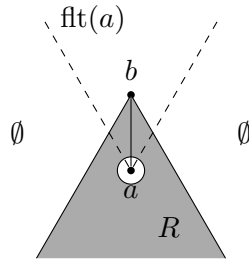


FIGURE 5.5

Sur la Figure 5.5 nous voyons un exemple type de cette situation, les symboles \emptyset

indiquent qu'aucun élément de E ne se trouve en dehors $\text{idl}(b) \cup \text{flt}(a)$.

Illustrons la proposition précédente avec deux exemples d'antimatroïdes d'ordre augmenté. Le premier est aussi un antimatroïde d'ordre alors que le deuxième ne l'est pas.

Exemple 25. Prenons $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ l'antimatroïde d'ordre augmenté basé sur le diagramme de la Figure 5.6a (donc $a = 3$ et $b = 4$), nous pouvons fabriquer un ensemble ordonné tel que l'antimatroïde d'ordre basé sur celui-ci sera $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$. Cet ensemble ordonné est donné sur la Figure 5.6b. Ceci est possible parce que $R = \{1, 2, 4\} = \text{idl}(4) \setminus \{3\}$ dans l'ordre de départ.

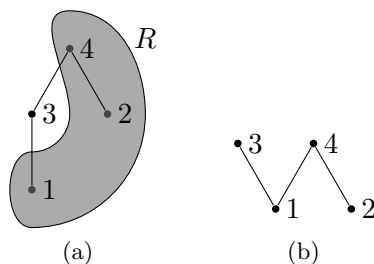


FIGURE 5.6 – Exemple d'un antimatroïde d'ordre augmenté qui est aussi un antimatroïde d'ordre.

Exemple 26. Prenons $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ l'antimatroïde d'ordre augmenté basé sur le diagramme de la Figure 5.7. Nous avons ici $a = 1$ et $b = 3$ et nous constatons l'existence du circuit $(\{1, 2\}, 3)$. Ceci est dû au fait que $R = \{2, 3\} \neq \text{idl}(3) \setminus \{1\}$, car $\text{idl}(3) \setminus \{1\} = \{3\}$ dans l'ordre de départ.

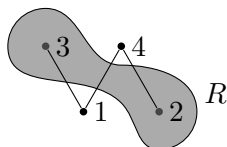


FIGURE 5.7 – Exemple d'un antimatroïde d'ordre augmenté qui n'est pas un antimatroïde d'ordre.

5.3 Antimatroïdes d'ordre augmenté : aspect géométrique

Il est temps d'aborder l'aspect plus géométrique de cette nouvelle famille. Commençons avec la définition suivante ; soient $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polytope plein et un hyperplan H tel que $H \cap \text{int}(P) = \emptyset$ et $q \in \mathbb{R}^n$. Nous dirons que q est *au-delà* H (par rapport P), si q

appartient au demi-espace ouvert défini par H qui ne contient pas P . De plus, un point q est *au-delà d'une facette* F de P si q est au-delà de l'hyperplan affine engendré par F .

Lemme 5.6. *Soient (E, \mathcal{F}) un antimatroïde d'ordre et $R \in 2^E \setminus \mathcal{F}$ de sorte que $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ soit un antimatroïde d'ordre augmenté. Alors χ^R est au-delà d'exactlyement une facette de $P_{\mathcal{F}}$.*

Démonstration. Notons (E, \leq) l'ensemble ordonné dont découle (E, \mathcal{F}) . Observons d'abord que χ^R ne peut pas violer les contraintes de boîte par le fait que $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ reste un polytope 0/1. Rappelons que nous savons par la Proposition 5.4 qu'il existe $a \in E \setminus R$ et $b \in R$ uniques tels que $a \prec b$ et $R = \text{flt}(a)^{\complement} \cup \{b\}$. Alors χ^R viole la contrainte de circuit $x_a - x_b \geq 0$. De plus, il ne peut pas violer d'autres contraintes, toujours par la Proposition 5.4, car la seule paire (c, d) avec $c \prec d$, $c \notin R$ et $d \in R$ satisfait $(a, b) = (c, d)$. \square

Nous savons par le Lemme 5.6 que $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ sera l'union de $P_{\mathcal{F}}$ et d'une pyramide. Cette dernière sera en fait l'enveloppe convexe de χ^R et de tous les sommets vérifiant $x_a - x_b = 0$. Appelons cet hyperplan B . Dû au fait que χ^R n'est au-delà que d'une facette (et de l'hyperplan B donc), il nous suffit d'obtenir la description linéaire de cette pyramide pour avoir la description complète de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$, car la description de $P_{\mathcal{F}}$ est connue par le Théorème 3.7. Démontrons cela dans le lemme général suivant. Rappelons que HDF signifie hyperplan définissant une facette.

Lemme 5.7. *Soient P un polytope de \mathbb{R}^n et r un point au-delà d'une seule facette B de P , alors les HDF de $P' = \text{conv}(P \cup \{r\})$ sont les HDF de P (à l'exception de l'hyperplan définissant B) et tous les hyperplans passant par le point r et par une crête de P comprise dans B .*

Démonstration. Remarquons que tout HDF de P qui ne contient pas B est un HDF de P' (car l'HDF est valide pour tout sommet de P' et contient n sommets affinement indépendants de P').

Ensuite, tout HDF de P' ne contenant pas r est un HDF de P (par définition d'un HDF). Montrons maintenant que tout HDF R de P' contenant r passe par une crête de P contenue dans B . L'hyperplan R doit contenir une crête de P , car il doit contenir n sommets affinement indépendants (il contient déjà r , il lui en faut encore $n - 1$) et être valide pour P' (en particulier pour P). Supposons que R ne passe par aucune crête contenue dans B mais par une autre crête S de P . Alors pour tout s dans S , le segment $[r, s]$ coupe B dans un point relativement intérieur. L'intersection (avec B) est due au fait que l'hyperplan définissant B sépare r et s , de plus $[r, s] \cap \text{aff}(B) \subseteq P'$ car P' est

convexe et $\text{aff}(B) \cap P' = B$. Le fait que le point d'intersection soit dans l'intérieur relatif de B vient du fait que R ne passe par aucune crête de P contenue dans B . Nous avons une contradiction car l'HDF R coupe P' en un point de son intérieur relatif. \square

La Figure 5.8 donne une idée de la situation décrite dans la preuve ci-dessus. Avec ce lemme, nous avons que les HDF de P restent des HDF de P' mais nous ne pouvons pas conclure que les facettes de P restent des facettes de P' . Effectivement, le cas où r est dans un HDF de P nous donne qu'une facette de P sera comprise strictement dans une facette de P' . Ceci dit, nous sommes intéressés dans ce travail par la description linéaire de polytopes et donc aux HDF principalement. Si nous appliquons ce lemme

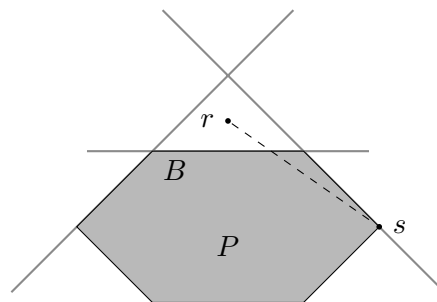


FIGURE 5.8

aux polytopes des faisables pour les antimatroïdes d'ordre augmenté, il en suit que la description de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ se résume aux facettes de $P_{\mathcal{F}}$ (sauf B et $P_{\mathcal{F}}$) et aux facettes de la pyramide décrite plus haut qui contient χ^R . Cette pyramide n'est rien d'autre que $\text{conv}(B \cup \{\chi^R\})$.

Encore une fois, posons $|E| = n$. Pour obtenir la description de la pyramide $\text{conv}(B \cup \{\chi^R\})$, nous considérons les facettes de $P_{\mathcal{F}}$ qui partagent $n - 1$ sommets affinement indépendants avec la facette B définie par $x_a - x_b \geq 0$ (nous garderons la notation B pour cette facette dans les propositions suivantes). Ensuite, il ne nous restera plus qu'à trouver l'hyperplan qui passe par ces $n - 1$ points et par χ^R .

Lemme 5.8. *Si le demi-espace $f(x) \geq \alpha$ définit une facette de $P_{\mathcal{F}}$ différente de B qui partage une crête avec B , alors*

$$f(x) + (x_a - x_b)(f(\chi^R) - \alpha) \geq \alpha \quad (5.2)$$

définit une facette de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$.

Démonstration. Supposons que le demi-espace $f(x) \geq \alpha$ définisse une facette de $P_{\mathcal{F}}$ différente de B (définie par $x_a - x_b \geq 0$) qui partage $n-1$ sommets affinement indépendants avec B . Alors l'équation (5.2) est valide pour $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$. Observons que si nous évaluons (5.2) en tout sommet de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ différent de χ^R , le premier terme de (5.2) est supérieur ou égal à α et le deuxième terme est un produit de nombres positifs car $x_a - x_b \geq 0$ définit une facette et $f(\chi^R)$ est l'évaluation d'une inégalité définissant une facette différente de B en χ^R (et χ^R n'est pas au-delà d'une facette qui est B). Nous avons ainsi que $f(\chi^R) \geq \alpha$. Si maintenant nous évaluons (5.2) en χ^R , par construction, nous obtenons $\beta \geq \beta$.

De plus, il existe n sommets de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ affinement indépendants qui vérifient (5.2) à l'égalité. Effectivement, par hypothèse, nous savons qu'il existe $n-1$ sommets affinement indépendants qui vérifient $x_a - x_b \geq 0$ et $f(x) \geq \alpha$. Ces $n-1$ sommets vérifient donc (5.2) aussi à l'égalité. Ajoutons à cela que χ^R vérifie (5.2) à l'égalité (car $\chi_a^R = 0$ et $\chi_b^R = 1$), celui-ci ne se trouve pas dans le même hyperplan ($x_a - x_b = 0$) que les $n-1$ autres sommets et donc nous avons bien nos n sommets affinement indépendants. \square

Nous savons à présent qu'il nous faut déterminer les HDF de la pyramide formée de l'enveloppe convexe de χ^R et de tous les sommets (de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$) vérifiant B à l'égalité. Par le Lemme 5.8 cela revient à trouver les facettes de $P_{\mathcal{F}}$ qui possèdent une crête en commun avec B . C'est cela que nous allons faire dans la suite de cette section, juste après la démonstration d'un petit lemme qui nous sera fort utile.

Lemme 5.9. *Soient (E, \leq) un ensemble ordonné, $U \subseteq E$ et $\beta \in \mathbb{R}^E$. Si $\beta_u = 0$ pour tout $u \in U$ et*

$$\sum_{u \in U} \alpha_u \chi^{\text{idl}(u)} + \beta = 0, \quad (5.3)$$

alors tous les α_u sont nuls.

Démonstration. Supposons que nous ayons l'égalité (5.3). Soit q la taille d'une chaîne de longueur maximum dans (U, \leq) . Définissons q ensembles A_i pour $0 \leq i \leq q$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned} A_1 &= \max\{U\}, \\ A_i &= \max\{U \setminus A_{i-1}\} \quad \text{pour } 2 \leq i \leq q. \end{aligned}$$

Dans (5.3), les coefficients α_u de $\chi^{\text{idl}(u)}$ avec $u \in A_1$ sont nuls, car chacun des $\chi^{\text{idl}(u)}$ est seul à avoir sa u -ième composante égale à 1 et de plus $\beta_u = 0$. Nous passons ensuite aux

α_u avec $u \in A_2$, etc... A l'étape i l'expression (5.3) est déjà réduite à

$$\sum_{u \in U \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_i)} \alpha_u \chi^{\text{idl}(u)} + \beta = 0,$$

et dans cette somme, les α_u correspondant à un u dans A_{i+1} seront nuls car chacun des $\chi^{\text{idl}(u)}$ est seul à avoir sa u -ième composante égale à 1 dans $U \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_i)$. Au final, comme $A_1 \cup \dots \cup A_q = U$, nous avons bien $\alpha_u = 0$ pour tout $u \in U$. \square

Recherchons à présent les facettes de $P_{\mathcal{F}}$ qui partagent une crête avec B . Ceci se fera en deux étapes. La première consiste en deux propositions qui décrivent le comportement des inégalités de boîte par rapport à B . La deuxième étape consiste en une proposition qui règle le cas des contraintes de circuits. Par le Théorème 3.7, toute facette de $P_{\mathcal{F}}$ appartient à une de ces deux catégories.

Rappelons que dans un antimatroïde d'ordre augmenté $(E, \mathcal{F} \cup \{R\})$ induit par l'ordre (E, \leq) , nous avons $a, b \in E$ tels que $a \prec b$, $a \notin R$ et $b \in R$. Nous avons appelé B la facette définie par la contrainte de circuit $x_a - x_b \geq 0$.

Proposition 5.10. *Pour tout h élément maximal de (E, \leq) , la facette H définie par $x_h \geq 0$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où $h = b$ et $\text{flt}(a) \neq \{a, b\}$.*

Démonstration. Premièrement, prenons le cas $h = b$ et $\text{flt}(a) \neq \{a, b\}$, alors les sommets qui se trouvent dans B et H , sont dans l'hyperplan $x_j = 0$, pour tout j dans $\text{flt}(a)$. Ceci vient du fait que nous savons $x_a - x_j \geq 0$ valide et comme nous avons par la facette B que $x_a = x_b$ et par la facette H que $x_b = 0$, ceci force $x_j = 0$. Donc ces sommets appartiennent à l'intersection d'au moins trois hyperplans distincts et ils engendrent un espace affín de dimension au plus $n - 3$. Donc, ils ne forment pas une crête.

Deuxièmement, dans l'autre cas, commençons par définir les trois ensembles suivants dont nous aurons besoin :

$$\begin{aligned} J &= \text{flt}(a) \setminus (\text{flt}(b) \cup \{a, h\}), \\ I &= E \setminus (J \cup \{a, h\}), \\ T &= \text{idl}(b) \setminus \text{idl}(a), \end{aligned}$$

et montrons que l'ensemble de sommets $S = \{\Psi(e) : e \in E\}$ avec $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}^E$ définie par

$$\Psi(e) = \begin{cases} \chi^\emptyset & \text{si } e = a \text{ ou } e = h \\ \chi^{\text{idl}(e)} & \text{si } e \in I \\ \chi^{\text{idl}(e) \cup \text{idl}(b)} & \text{si } e \in J \end{cases}$$

est affinement indépendant. La Figure 5.9 nous montre une représentation de ces ensembles sur le diagramme de Hasse de (E, \leq) . Les hachures horizontales représentent l'ensemble $I \subset E$. Il nous faut donc montrer que les $n - 2$ sommets de $S \setminus \{\chi^\emptyset\}$ sont linéairement

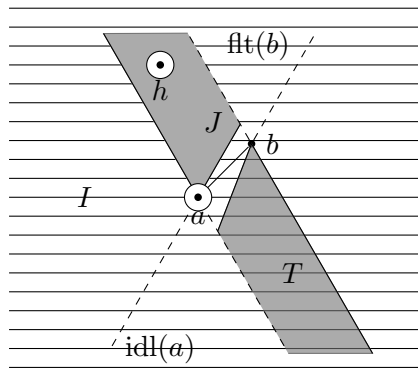


FIGURE 5.9

indépendants. Ecrivons une combinaison linéaire nulle des éléments de cet ensemble :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \chi^{\text{idl}(i)} + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi^{\text{idl}(j) \cup \text{idl}(b)} = 0.$$

Du fait que $\text{idl}(j) \cup \text{idl}(b) = \text{idl}(j) \cup T$ pour tout j dans J et cette dernière union est disjointe (par la définition de T , tout $t \in T$ est incomparable avec a , alors que tout élément de $\text{idl}(J)$ est comparable avec a), nous réécrivons la combinaison linéaire (5.4) comme :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \chi^{\text{idl}(i)} + \sum_{j \in J} \alpha_j (\chi^{\text{idl}(j)} + \chi^T) = 0, \quad (5.4)$$

ou bien,

$$\sum_{e \in I \cup J} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi^T = 0.$$

Par définition, nous avons que $I \cup J = E \setminus \{a, h\} = (\text{idl}(b) \cup \text{idl}(b)^c) \setminus \{a, h\}$. L'égalité ci-dessus devient

$$\sum_{e \in \text{idl}(b)^c \setminus h} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{e \in \text{idl}(b) \setminus \{a\}} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi^T = 0. \quad (5.5)$$

Utilisons à présent le Lemme 5.9 avec comme vecteur β la somme des deux dernières

sommes de (5.5). Nous pouvons bien appliquer le lemme car $\text{idl}(b)^{\mathbb{G}} \cap (\text{idl}(b) \cup T) = \emptyset$. Avec le lemme, les α_e présents dans la première somme sont nécessairement nuls et l'équation (5.5) devient :

$$\sum_{e \in \text{idl}(b) \setminus \{a\}} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} = 0.$$

La troisième somme de l'équation a disparu car $J \subseteq \text{idl}(b)^{\mathbb{G}} \setminus h$ (par définition, tout élément j de J est tel que $a < j$ et donc il est impossible d'avoir $j < b$) donc les α_j pour $j \in J$ sont également nuls. Pour terminer, appliquons encore une fois le Lemme 5.9 avec l'expression ci-dessus et comme vecteur β , le vecteur nul. Au final, nous avons donc bien $\alpha_e = 0$ pour tout $e \in E \setminus \{a, h\}$, ce qui prouve l'indépendance affine de S . Pour clôturer la démonstration, remarquons que S possède bien $n - 1$ éléments et que tous ceux-ci appartiennent à B et H (car $h \neq b$ ou $\text{flt}(a) = \{a, b\}$). \square

Proposition 5.11. *Pour tout m élément minimal de (E, \leq) , la facette M définie par $x_m \leq 1$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où $m = a$ et $\text{idl}(b) \neq \{a, b\}$.*

Démonstration. Premièrement, prenons le cas $m = a$ et $\text{idl}(b) \neq \{a, b\}$, alors les sommets qui appartiennent à B et M , sont dans l'hyperplan $x_j = 1$, pour tout j dans $\text{idl}(b)$. Ceci vient du fait que nous savons $x_a - x_j \geq 0$ valide et, comme nous avons par la facette B que $x_a = x_b$ et par la facette M que $x_a = 1$, ceci force $x_j = 1$. Donc ces sommets appartiennent à l'intersection d'au moins trois hyperplans distincts et ils engendrent un espace affín de dimension au plus $n - 3$. Donc, ils ne forment pas une crête.

Deuxièmement, dans l'autre cas, nous allons utiliser le résultat de la Proposition 5.10. Considérons l'ordre dual de (E, \leq) , c'est-à-dire l'ensemble ordonné (E, \leq_D) avec $e_1 \leq e_2 \Leftrightarrow e_2 \leq_D e_1$ pour e_1, e_2 dans E . Il est clair que $P_{\mathcal{F}_D}$ que nous définissons comme le polytope des faisables basé sur l'antimatroïde issu de l'ensemble ordonné (E, \leq_D) , est identique au polytope $P_{\mathcal{A}}$, qui est le polytope des convexes basé sur l'antimatroïde (E, \mathcal{F}) . Or, nous savons par la Proposition 5.10 que $x_m \geq 0$ possède une crête en commun avec la facette B_D (du polytope $P_{\mathcal{A}}$) définie par $x_b - x_a \geq 0$. Comme $P_{\mathcal{F}_D} = P_{\mathcal{A}}$, nous utilisons l'affinité (3.1) ($x'_i = 1 - x_i$ pour tout $i \in E$) pour déduire que $x_m \leq 1$ possède une crête en commun avec la facette B (du polytope $P_{\mathcal{F}}$) définie par $x_a - x_b \geq 0$. Notons que, comme nous ne sommes pas dans le cas où $m = a$ et $\text{idl}(b) \neq \{a, b\}$, nous sommes donc bien dans les conditions pour appliquer la proposition. \square

Nous allons aborder ici la recherche de crêtes communes entre B et les facettes définies par les contraintes de circuits, la démonstration de la proposition suivante suit grossièrement la même idée que les démonstrations précédentes pour les contraintes de

boîtes, à la différence que son déroulement est un peu plus technique et les notations un peu plus lourdes.

Proposition 5.12. *Pour tout u, v de (E, \leq) tel que v couvre u , nous supposons que $(a, b) \neq (u, v)$ pour que la proposition ait un sens. La facette V définie par $x_u - x_v \geq 0$ possède une crête en commun avec B sauf dans le cas où les conditions suivantes sont réunies : $u \in \text{idl}(b)$, $a \in \text{idl}(v)$, $a \neq u$ et $b \neq v$.*

Démonstration. Premièrement, prenons le cas $u \in \text{idl}(b)$, $a \in \text{idl}(v)$, $a \neq u$ et $b \neq v$, que nous appellerons le cas dégénéré, alors les sommets appartenant à B et V sont dans l'hyperplan $x_b - x_v = 0$. Ceci vient du fait que, pour ces sommets, nous avons la suite d'inégalités suivantes, qui est en fait une suite d'égalités :

$$x_b \leq x_u = x_v \leq x_a = x_b.$$

Les deux inégalités viennent du fait que $u \in \text{idl}(b)$ et $a \in \text{idl}(v)$ alors que les deux égalités viennent de V et de B . Nous avons donc que les sommets vérifient $x_b = x_v$. Donc ceux-ci appartiennent à l'intersection des trois hyperplans distincts suivants,

$$x_a = x_b, \tag{5.6}$$

$$x_u = x_v, \tag{5.7}$$

$$x_b = x_v. \tag{5.8}$$

Ceux-ci engendrent un espace affín de dimension au plus $n - 3$, car ils ne sont pas dans un même faisceau d'hyperplans. Effectivement, l'intersection des hyperplans définis par (5.6) et (5.7) contient le point $e_a + e_b$. Or ce point n'appartient pas à l'hyperplan défini par (5.8).

Deuxièmement, dans le cas non dégénéré, nous avons l'hypothèse de départ suivante :

$$u \notin \text{idl}(b) \text{ ou } a \notin \text{idl}(v) \text{ ou } a = u \text{ ou } b = v. \tag{5.9}$$

Nous allons détailler la preuve pour $a \neq u$, nous exprimerons explicitement les endroits du raisonnement qui utilisent cette hypothèse. A la fin de cette preuve, nous donnerons les parties à modifier pour le cas $a = u$ sans refaire tout le raisonnement qui sera essentiellement identique. Commençons par définir les ensembles suivants dont nous

aurons besoin :

$$\begin{aligned}
 I &= \{e \in E : (a, b \in \text{idl}(e) \text{ ou } a, b \notin \text{idl}(e)) \text{ et } (u, v \in \text{idl}(e) \text{ ou } u, v \notin \text{idl}(e))\}, \\
 J &= \{e \in E : e \neq a, e \in \text{ftt}(a) \setminus \text{ftt}(b) \text{ et } (u, v \in \text{idl}(e, b) \text{ ou } u, v \notin \text{idl}(e, b))\}, \\
 K &= \{e \in E : e \neq u, e \in \text{ftt}(u) \setminus \text{ftt}(v) \text{ et } (a, b \in \text{idl}(e, v) \text{ ou } a, b \notin \text{idl}(e, v))\}, \\
 L &= E \setminus (I \cup J \cup K \cup \{a, u\}).
 \end{aligned}$$

Notons $L \subseteq (\text{ftt}(a, u)) \setminus (\text{ftt}(b, v) \cup \{a, u\})$, nous utiliserons cela plus bas. La Figure 5.10 montre une situation générale possible pour les ensembles I, J, K et L . La Figure 5.11 quant à elle illustre un exemple précis sur le diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné donné. Indiquons que I, J, K et L sont deux à deux disjoints. De plus, $I \cup J \cup K \cup L = E \setminus \{a, u\}$.

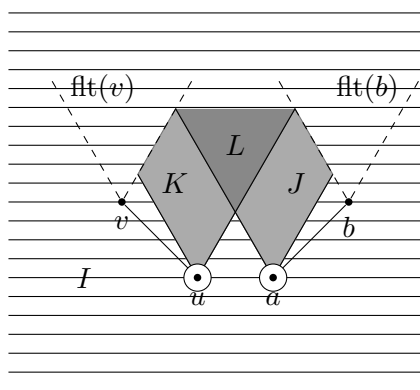
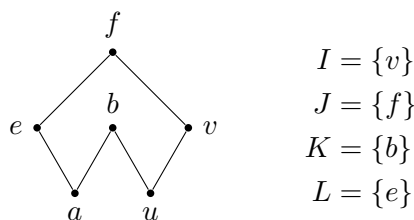


FIGURE 5.10



$$\begin{aligned}
 I &= \{v\} \\
 J &= \{f\} \\
 K &= \{b\} \\
 L &= \{e\}
 \end{aligned}$$

FIGURE 5.11

Montrons à présent que l'ensemble de sommets $S = \{\Psi(e) : e \in E\}$ avec $\Psi : E \rightarrow \mathbb{R}^E$

définie par

$$\Psi(e) = \begin{cases} \chi^\emptyset & \text{si } e = a \text{ ou } e = u \\ \chi^{\text{idl}(e)} & \text{si } e \in I \\ \chi^{\text{idl}(e,b)} & \text{si } e \in J \\ \chi^{\text{idl}(e,v)} & \text{si } e \in K \\ \chi^{\text{idl}(e,b,v)} & \text{si } e \in L \end{cases}$$

est affinement indépendant. Cela revient à montrer que les $n - 2$ sommets de $S \setminus \{\chi^\emptyset\}$ sont linéairement indépendants. Partons d'une combinaison linéaire nulle des éléments de cet ensemble valant zéro de la manière suivante :

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \Psi(i) + \sum_{j \in J} \alpha_j \Psi(j) + \sum_{k \in K} \alpha_k \Psi(K) + \sum_{l \in L} \alpha_l \Psi(l) = 0. \quad (5.10)$$

En introduisant les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} T_J &= \text{idl}(b) \setminus \text{idl}(a), \\ T_K &= \text{idl}(v) \setminus \text{idl}(u), \\ T_L &= T_I \cup T_J, \end{aligned}$$

nous pouvons réécrire (5.10) avec des manipulations identiques que celles effectuées dans la preuve de la Proposition 5.10. Remarquons les propriétés suivantes (le symbole \sqcup signifie l'union disjointe) : si $e \in J$ alors $\text{idl}(e, b) = \text{idl}(e) \sqcup T_J$, si $e \in K$ alors $\text{idl}(e, v) = \text{idl}(e) \sqcup T_K$ et si $e \in L$ alors $\text{idl}(e, b, v) = \text{idl}(e) \sqcup T_L$. L'équation (5.10) devient

$$\sum_{e \in E \setminus \{a, u\}} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi^{T_J} + \sum_{k \in K} \alpha_k \chi^{T_K} + \sum_{l \in L} \alpha_l \chi^{T_L} = 0.$$

De plus, si nous appelons $W = (\text{idl}(b) \cup \text{idl}(v)) \setminus \{a, u\}$, nous avons $E \setminus \{a, u\} = (W^{\complement} \setminus \{a, u\}) \cup W$ et donc :

$$\sum_{e \in W^{\complement} \setminus \{a, u\}} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{e \in W} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} + \sum_{j \in J} \alpha_j \chi^{T_J} + \sum_{k \in K} \alpha_k \chi^{T_K} + \sum_{l \in L} \alpha_l \chi^{T_L} = 0 \quad (5.11)$$

Utilisons à présent le Lemme 5.9 avec comme vecteur β les quatre dernières sommes de (5.11). Nous pouvons bien appliquer celui-ci car $(W^{\complement} \setminus \{a, u\}) \cap (W \cup T_J \cup T_K \cup T_L) = \emptyset$. Avec le lemme, les α_e présents dans la première somme sont nécessairement nuls.

Pour simplifier la réécriture de (5.11), nous allons montrer dans un premier temps

que $W \cap L = \emptyset$ (ce qui rendra nulle la dernière somme de (5.11) car cela signifie que $L \subseteq W^c$ et donc tout coefficient de la dernière somme de (5.11) apparaît aussi comme coefficient de la première somme qui s'annule grâce au lemme). Par l'absurde, supposons qu'il existe $l \in E$ tel que $l \in W$ et $l \in L$. Par définition de L nous avons que soit $u < l$ soit $a < l$. Supposons que nous sommes dans le cas $a < l$ (l'autre cas se traite de façon similaire). Ceci implique que l est incomparable avec b (car $a < l < b$ est exclu par $a \prec b$ et $b \leq l$ est exclu par $l \in L$). Par $l \in W$, $l \leq v$ (nous venons de montrer que $l \leq b$ est exclu) et donc l est incomparable avec u (sinon contradiction avec $u \prec v$ ou bien $l \in J$ qui contredit $J \cap L = \emptyset$). Mais comme $l \in L$, il faut $u \in \text{idl}(l, b)$ et $v \notin \text{idl}(l, b)$. Donc $u \leq b$. Récapitulons les informations trouvées ci-dessus :

- Il faut que $a \neq u$, sinon comme $a < l$ cela contredit le fait que l est incomparable u ,
- Nous avons $a < l < v$ ($l = v$ est exclu par $l \in L$),
- Nous avons $u \leq b$ et donc $u \in \text{idl}(b)$,
- Il faut que $b \neq v$, sinon $a < l < v$ contredit $a \prec b$.

Or, tout ceci entraîne une contradiction avec notre hypothèse (5.9). Il s'ensuit que $W \cap L = \emptyset$.

Dans un deuxième temps, toujours dans le but de simplifier (5.11), nous allons montrer que soit $W \cap J = \emptyset$ soit $W \cap K = \emptyset$ (ce qui rendra nulle la deuxième ou la troisième somme de (5.11) car cela signifie que $J \subseteq W^c$ ou $K \subseteq W^c$ et donc tout coefficient de la deuxième ou de la troisième somme de (5.11) apparaît aussi comme coefficient de la première somme qui s'annule grâce au lemme).

Par l'absurde, supposons que nous avons un $j \in W \cap J$ et un $k \in \cap K$. Par $j \in J$ nous avons $j > a$ et $j \neq b$, par $j \in W$ nous avons $j \leq b$ (impossible car cela contredit $a \prec b$) ou $j \leq v$. Par $k \in K$ nous avons $k > u$ et $j \neq v$, par $k \in W$ nous avons $j \leq b$ ou $j \leq v$ (impossible car cela contredit $u \prec v$). Récapitulons les informations trouvées ci-dessus :

- Nous avons $a < j \leq v$ et donc $a \in \text{idl}(v)$,
- Nous avons $u < k \leq b$ et donc $u \in \text{idl}(b)$,
- Il faut que $b \neq v$, sinon par les remarques précédentes : $b = v = j = k$, ce qui contredit le fait que $J \cap K = \emptyset$.

Nous devons ici utiliser notre hypothèse de départ pour affirmer que $a \neq u$ et conclure que tout ceci entraîne une contradiction avec notre hypothèse (5.9). Il en suit que $W \cap J = \emptyset$ ou $W \cap K = \emptyset$.

Simplifions (5.11) et supposons que nous sommes dans le cas où $W \cap K = \emptyset$ (le cas

$W \cap J = \emptyset$ est similaire), alors (5.11) devient

$$\begin{aligned} \sum_{e \in W} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)+} - \sum_{j \in J \cap W} \alpha_j \chi^{T_J} &= 0. \\ \sum_{e \in W \cap J} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)+} + \sum_{e \in W \setminus J} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)+} + \sum_{j \in J \cap W} \alpha_j \chi^{T_J} &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Appliquons encore une fois le Lemme 5.9 avec comme vecteur β les deux dernières sommes de (5.12). Le lemme est applicable car $(J \cap W) \cap T_J = \emptyset$ (par définition de T_J , $J \cap T_J = \emptyset$). Donc tous les α_e avec $e \in W \cap J$ sont nuls et (5.12) devient

$$\sum_{e \in W \setminus J} \alpha_e \chi^{\text{idl}(e)} = 0.$$

Pour terminer, appliquons encore une fois le Lemme 5.9 avec l'expression ci-dessus et comme vecteur β le vecteur nul. Au final, nous avons donc bien que $\alpha_e = 0$ pour tout $e \in E \setminus \{a, u\}$, ce qui prouve l'indépendance affine de S . Remarquons que S possède bien $n - 1$ éléments et que tous ceux-ci vérifient B et V à l'égalité.

Pour réellement clôturer la preuve, il faut encore étudier le cas $a = u$. Ceci se fait en réutilisant les arguments ci-dessus mais avec un ensemble de sommets S défini de manière un peu différente. Il faut travailler avec l'ensemble de sommets $S' = \{\Psi'(e) : e \in E\}$ avec $\Psi' : E \rightarrow \mathbb{R}^E$,

$$\Psi'(e) = \begin{cases} \chi^\emptyset & \text{si } e = a \text{ ou } e = v \\ \chi^{\text{idl}(e)} & \text{si } e \in I \\ \chi^{\text{idl}(e,b)} & \text{si } e \in J \setminus \{v\} \\ \chi^{\text{idl}(e,v)} & \text{si } e \in K \\ \chi^{\text{idl}(e,b,v)} & \text{si } e \in L \end{cases}$$

L'autre changement est qu'il faut montrer à un moment que $W \cap (J \setminus \{v\}) = \emptyset$ et $W \cap K = \{b\}$ afin de réécrire (5.11). Ensuite la preuve se finit de manière identique. \square

Observons un exemple de description d'un antimatroïde d'ordre augmenté. Pour cela, nous utilisons le programme `polymake` [13] pour obtenir les facettes de $P_{\mathcal{F}}$ et de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$.

Exemple 27. Prenons l'antimatroïde d'ordre augmenté basé sur le schéma de la Figure 5.12. Si nous reprenons les notations précédemment utilisées, nous avons $a = 3$ et $b = 5$. Les descriptions de $P_{\mathcal{F}}$ et de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ sont données respectivement par les Figures 5.13a et 5.13b. Nous observons que toutes les IDF de $P_{\mathcal{F}}$ sauf $x_3 - x_5 \geq 0$ sont des IDF de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$. Les facettes définies par $x_3 - x_4 \geq 0$, $x_3 \leq 1$ et $x_5 \geq 0$ de $P_{\mathcal{F}}$ ne possèdent pas de crête commune avec B , comme l'indiquent respectivement les Proposi-

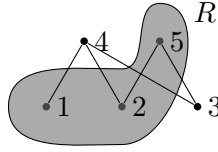


FIGURE 5.12

Facettes de $P_{\mathcal{F}}$	
$x_1 \leq 1,$	$x_1 - x_4 \geq 0,$
$x_2 \leq 1,$	$x_2 - x_4 \geq 0,$
$x_3 \leq 1,$	$x_3 - x_4 \geq 0,$
$x_4 \geq 0,$	$x_2 - x_5 \geq 0,$
$x_5 \geq 0,$	$x_3 - x_5 \geq 0.$

(a)

Facettes de $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$	
$x_1 \leq 1,$	
$x_2 \leq 1,$	$x_2 - x_4 \geq 0,$
$x_3 \leq 1,$	$x_2 - x_5 \geq 0,$
$x_4 \geq 0,$	$x_1 - x_4 \geq 0,$
$x_5 \geq 0,$	$x_3 - x_4 \geq 0,$
$x_1 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0.$	

(b)

FIGURE 5.13

tions 5.10, 5.11 et 5.12. Ces facettes ne rentrent donc pas dans le cadre du Lemme 5.8. Les autres facettes en revanche possèdent bien une crête commune avec B et nous pouvons utiliser le Lemme 5.8 pour décrire complètement $P_{\mathcal{F} \cup \{R\}}$ en termes d'IDF. Par exemple, la facette $x_1 - x_4 \geq 0$ devient avec ce lemme : $x_1 + x_3 - x_4 - x_5 \geq 0$.

Chapitre 6

Conclusion

Faisons une synthèse de notre travail. Nous avons obtenu la liste des antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près (le nombre que nous en avons trouvé est d'ailleurs apparu fin avril 2013 sur l'OEIS dans la suite A224913). Grâce à celle-ci, nous avons vérifié que plusieurs de ces antimatroïdes ont des polytopes des faisables qui ne sont pas décrits par les résultats de Korte et Lovász. Dans cette liste de 34 antimatroïdes sur quatre éléments, 21 étaient déjà classés dans une des familles de [18] dont la description linéaire de leurs polytopes est connue. En introduisant les nouvelles familles des antimatroïdes au polytopes pyramidaux et des antimatroïdes d'ordre augmenté, nous sommes passés de 21 à 28 antimatroïdes couverts sur quatre éléments.

Le but ici n'était pas de compléter cette liste au cas par cas (ce qui serait aisé avec un logiciel tel que `polymake`) mais bien de trouver des familles aussi larges que possible. Ce but a été atteint dans la mesure où nous avons identifié les deux nouvelles familles introduites.

Cela dit, de nombreuses pistes méritent encore d'être explorées pour décrire des polytopes des faisables supplémentaires. Par exemple, Caspard et Monjardet ont montré [2] qu'étant donné deux antimatroïdes M_1 et M_2 , il existe une suite d'antimatroïdes commençant par M_1 et se terminant par M_2 telle que deux antimatroïdes consécutifs ne diffèrent exactement que d'un seul ensemble faisable. Ceci motive le fait de pousser plus loin les résultats de la section 5.3 qui décrivent le polytope des faisables d'antimatroïdes d'ordre auxquels un ensemble faisable a été ajouté. Tenter d'adapter ces résultats pour des familles autres que les antimatroïdes d'ordre est une idée séduisante mais cela semble cependant difficile, car le vecteur caractéristique du faisable ajouté ne sera pas forcément au-delà d'exactly une facette du polytope des faisables original (ce qui était le cas pour les antimatroïdes d'ordre augmenté). Il nous faudrait alors développer de nouveaux

théorèmes pour identifier les crêtes comprises dans les hyperplans définissant les facettes du nouveau polytope obtenu.

Appendice

Liste des antimatroïdes de \mathbb{A}_4^{iso}

Nous donnons la liste des 34 antimatroïdes sur quatre éléments pris à isomorphisme près. Pour chacun des antimatroïdes de la liste nous donnons sa collection de faisables \mathcal{F} et spécifions s'il appartient à la famille des antimatroïdes d'ordre (ordre), d'ordre double (ordre-2), d'élagage d'arbre par arêtes (elag-aretes), d'élagage d'arbre par sommets (elag-sommets) ou alors s'il n'appartient à aucune de ses familles.

1. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
2. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
3. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
4. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
5. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
6. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
7. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
8. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
9. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)

10. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
11. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
12. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
13. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
14. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
15. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
16. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
17. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
18. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
19. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
20. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
21. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
22. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre-2),(elag-arêtes),(elag-sommets)
23. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucun
24. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucun

25. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre-2)
26. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
27. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
28. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
29. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (elag-sommets)
30. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre)
31. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre-2),(elag-arêtes)
32. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre-2)
33. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : aucune
34. $\mathcal{F} = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{3, 4\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4\} \}$
Familles : (ordre),(ordre-2),(elag-arêtes),(elag-sommets)

Pour terminer cette section, ajoutons que les antimatroïdes 5 et 14 de la liste ci-dessus ne rentraient dans aucune des familles permettant la description de leur polytope. Mais nous observons qu'ils sont des antimatroïdes pyramidaux dont nous avons une description linéaire de la base (par la description des antimatroïdes sur trois éléments). Notons également que les antimatroïdes 5, 12, 14, 15, 21, 23 et 28 ne rentraient dans aucune des familles permettant la description de leur polytope. Mais ceux-ci sont des antimatroïdes d'ordre augmenté, et donc nous sommes capable de décrire leur polytope avec les résultats du Chapitre 5.

Polytopes des faisables pour \mathbb{A}_4^{iso}

Nous donnons ici à titre informatif la description linéaire des polytopes des faisables des antimatroïdes de \mathbb{A}_4^{iso} qui ne sont pas des antimatroïdes d'ordre (leur description linéaire étant très facile à obtenir). Dans la mesure du possible nous indiquons l'origine des inégalités trouvées par les lettres a , b et c comme ceci :

- (a) $x_i \geq 0$ est facette $\Leftrightarrow \{i\}$ est convexe,
- (b) $x_i \leq 1$ est facette $\Leftrightarrow \nexists$ de circuit de taille 2 avec racine $\{i\}$,
- (c) Contrainte de circuit.

Ces descriptions linéaires ont été obtenues à l'aide du logiciel `polymake` [13].

```

5
{} {1} {1,2} {1,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],[1,1,1,1,0],
[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a) x4 >= 0
1 : (a) x2 >= 0
2 : (c) x2 + x3 - x4 >= 0
3 : (a) x3 >= 0
4 : (c) x1 - x4 >= 0
5 : (c) x1 - x3 >= 0
6 : (c) x1 - x2 >= 0
7 : (c) -x1 >= -1

```

```

12
{} {1} {2} {1,2} {1,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a) x4 >= 0
1 : (a) x2 >= 0
2 : (c) x2 + x3 - x4 >= 0
3 : (a) x3 >= 0
4 : (c) x1 - x4 >= 0
5 : (b) -x2 >= -1
6 : (c) x1 - x3 >= 0
7 : (b) -x1 >= -1

```

```

14
{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);

```

```

Facets :
0 : (c)  $x_3 - x_4 \geq 0$ 
1 : (c)  $x_1 - x_4 \geq 0$ 
2 :  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_2 - x_4 \geq 0$ 
4 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
5 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
6 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 
7 : (a)  $x_4 \geq 0$ 

```

```

15
{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
2 :  $x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \geq 0$ 
3 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
4 : (c)  $x_1 - x_4 \geq 0$ 
5 : (c)  $x_2 - x_4 \geq 0$ 
6 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

```

16
{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
2 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
3 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 
4 : (c)  $x_3 - x_4 \geq 0$ 
5 : (c)  $x_2 - x_4 \geq 0$ 
6 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 

```

```

17
{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_1 \geq 0$ 

```

```

2 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_1 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
4 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
5 : (c)  $x_2 - x_4 \geq 0$ 
6 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 
8 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 

```

18

```

{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
2 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
3 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
4 : (c)  $x_3 - x_4 \geq 0$ 
5 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
6 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

19

```

{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
2 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
4 : (c)  $x_1 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
5 : (c)  $x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
6 :  $x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 \geq 0$ 
7 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
8 : (b)  $-x_4 \geq -1$ 
9 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
10 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
11 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

21

```

{} {1} {2} {1,2} {2,3} {1,4} {1,2,3} {1,2,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,0,1,1,0],
[1,1,0,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :

```

```

0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
2 : (c)  $x_1 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
3 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
4 : (b)  $-x_4 \geq -1$ 
5 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 
6 : (c)  $x_2 - x_3 \geq 0$ 
7 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 

```

22

```

{} {1} {2} {1,2} {2,3} {1,4} {1,2,3} {1,2,4} {2,3,4} {1,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,0,1,1,0],
[1,1,0,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,0,1,1,1],[1,1,0,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (c)  $x_2 - x_3 + x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
2 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
4 : (c)  $x_1 + x_2 - x_4 \geq 0$ 
5 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
6 : (c)  $x_1 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
7 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
8 : (b)  $-x_4 \geq -1$ 
9 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
10 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
11 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

23

```

{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
2 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
3 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
4 : (c)  $x_1 - x_4 \geq 0$ 
5 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
6 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

24

```

{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);

```



```

Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
2 : (c)  $x_1 + x_2 - x_4 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
4 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
5 : (c)  $x_1 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
6 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
7 : (b)  $-x_4 \geq -1$ 
8 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
9 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
10 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

25

```

{} {1} {2} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {2,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,1,1,0,0],[1,1,0,1,0],
[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,0,1,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],
[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_1 \geq 0$ 
2 : (c)  $x_1 + x_2 - x_4 \geq 0$ 
3 : (c)  $x_1 + x_2 - x_3 \geq 0$ 
4 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
5 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
6 : (b)  $-x_4 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
8 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
9 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

28

```

{} {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,0,0,1,0],[1,1,1,0,0],
[1,1,0,1,0],[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a)  $x_4 \geq 0$ 
1 : (a)  $x_2 \geq 0$ 
2 : (c)  $x_2 + x_3 - x_4 \geq 0$ 
3 : (a)  $x_3 \geq 0$ 
4 : (c)  $x_1 - x_4 \geq 0$ 
5 : (b)  $-x_3 \geq -1$ 
6 : (b)  $-x_2 \geq -1$ 
7 : (b)  $-x_1 \geq -1$ 

```

29

```

{} {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}

```

```

$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,0,0,1,0],[1,1,1,0,0],
[1,1,0,1,0],[1,0,1,1,0],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 :(a) x4 >= 0
1 :(a) x1 >= 0
2 :(c) x1 + x2 - x4 >= 0
3 :(a) x2 >= 0
4 :(c) x1 + x3 - x4 >= 0
5 : x1 + x2 + x3 - 2x4 >= 0
6 :(c) x2 + x3 - x4 >= 0
7 :(a) x3 >= 0
8 :(b) -x4 >= -1
9 :(b) -x3 >= -1
10 :(b) -x2 >= -1
11 :(b) -x1 >= -1

```

```

31
{} {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,0,0,1,0],[1,1,1,0,0],
[1,1,0,1,0],[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],
[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 :(a) x4 >= 0
1 :(a) x1 >= 0
2 :(c) x1 + x2 - x4 >= 0
3 :(a) x2 >= 0
4 :(c) x1 + x3 - x4 >= 0
5 :(a) x3 >= 0
6 :(b) -x4 >= -1
7 :(b) -x3 >= -1
8 :(b) -x2 >= -1
9 :(b) -x1 >= -1

```

```

32
{} {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {2,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,0,0,1,0],[1,1,1,0,0],
[1,1,0,1,0],[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,0,1,0,1],[1,1,1,1,0],
[1,1,1,0,1],[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 :(a) x4 >= 0
1 :(a) x1 >= 0
2 :(c) x1 + x2 - x4 >= 0
3 :(a) x2 >= 0
4 :(a) x3 >= 0
5 :(b) -x4 >= -1
6 :(b) -x3 >= -1

```

```
7 : (b) -x2 >= -1
8 : (b) -x1 >= -1
```

```
33 (convex shelling plan)
```

```
{ } {1} {2} {3} {1,2} {1,3} {2,3} {1,4} {2,4} {3,4} {1,2,3} {1,2,4} {1,3,4} {2,3,4} {1,2,3,4}
$p=new Polytope(POINTS=>[[1,0,0,0,0],[1,1,0,0,0],[1,0,1,0,0],[1,0,0,1,0],[1,1,1,0,0],
[1,1,0,1,0],[1,0,1,1,0],[1,1,0,0,1],[1,0,1,0,1],[1,0,0,1,1],[1,1,1,1,0],[1,1,1,0,1],
[1,1,0,1,1],[1,0,1,1,1],[1,1,1,1,1]]);
print_constraints($p);
Facets :
0 : (a) x4 >= 0
1 : (a) x1 >= 0
2 : (c) x1 + x2 + x3 - x4 >= 0
3 : (a) x2 >= 0
4 : (a) x3 >= 0
5 : (b) -x4 >= -1
6 : (b) -x3 >= -1
7 : (b) -x2 >= -1
8 : (b) -x1 >= -1
```

Bibliographie

- [1] D. AVIS, D. BREMNER et R. SEIDEL : How good are convex hull algorithms? *Computational Geometry : Theory and Applications*, 7 :265–301, 1997.
- [2] N. CASPARD et B. MONJARDET : Some lattices of closure systems on a finite set. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 6(2) :163–190, 2004.
- [3] R. DIESTEL : *Graph Theory, 4th Edition*, vol. 173 de *Graduate texts in mathematics*. Springer, 2012.
- [4] B. L. DIETRICH : A circuit set characterization of antimatroids. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 43(3) :314–321, 1987.
- [5] R. P. DILWORTH : Lattices with unique irreducible decompositions. *Annals of Mathematics*, 2(41) :771–777, 1940.
- [6] J.-P. DOIGNON et J.-C. FALMAGNE : *Knowledge Spaces*. Springer Verlag, 1999.
- [7] J.-P. DOIGNON, S. FIORINI et G. JORET : Facets of the linear ordering polytope : A unification for the fence family through weighted graphs. *Journal of Mathematical Psychology*, 50(3) :251 – 262, 2006.
- [8] P. H. EDELMAN : Meet-distributive lattices and the anti-exchange closure. *Algebra universalis*, 10 :290–299, 1980.
- [9] P. H. EDELMAN et R. E. JAMISON : The theory of convex geometries. *Geometriae Dedicata*, 19(3) :247–270, 1985.
- [10] J.-C. FALMAGNE : A representation theorem for finite random scale systems. *Journal of Mathematical Psychology*, 18 :52–72, 1978.
- [11] J.-C. FALMAGNE et J.-P. DOIGNON : *Learning spaces*. Springer Berlin Heidelberg, 2011.
- [12] S. FIORINI : A short proof of a theorem of falmagne. *Journal of Mathematical Psychology*, 48(1) :80–82, 2003.

- [13] E. GAWRILOW et M. JOSWIG : polymake : a framework for analyzing convex polytopes. In G. KALAI et G. M. ZIEGLER, édés : *Polytopes — Combinatorics and Computation*, p. 43–74. Birkhäuser, 2000.
- [14] H. GRÖFLIN : Path-closed sets. *Combinatorica*, 4(4) :281–290, 1984.
- [15] B. GRÜNBAUM : *Convex Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1967.
- [16] R. E. JAMISON-WALDNER : A perspective on abstract convexity : classifying alignments by varieties. *Convexity and Related Combinatorial Geometry*, p. 113–150, 1982.
- [17] B. KORTE et L. LOVÁSZ : Greedoids and linear objective functions. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 5(2) :229–238, 1984.
- [18] B. KORTE et L. LOVÁSZ : Polyhedral results for antimatroids. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 555(1) :283–295, 1989.
- [19] B. KORTE, L. LOVÁSZ et R. SCHRADER : *Greedoids*. Algorithms and Combinatorics. Springer-Verlag, 1991.
- [20] T. M. LIEBLING et H. GROEFLIN : *Connected and Alternating Vectors : Polyhedra and Algorithms*. 1979.
- [21] J. OXLEY : *Matroid Theory*. Oxford Graduate Texts in Mathematics Series. Oxford University Press, 2006.
- [22] S. ROSS : *Introduction to Probability Models*. Elsevier Science, 2006.
- [23] A. SCHRIJVER : *Combinatorial Optimization : Polyhedra and Efficiency*. Num. vol. 1 de Algorithms and Combinatorics. Springer, 2003.
- [24] B. SCHRÖDER : *Ordered sets : an introduction*. Birkhauser Verlag GmbH, 2003.
- [25] N. SLOANE : The on-line encyclopedia of integer sequences. <http://oeis.org>, 2012.
- [26] R. P. STANLEY : Two poset polytopes. *Discrete & Computational Geometry*, 1 :9–23, 1986.
- [27] W. TROTTER : *Combinatorics and Partially Ordered Sets : Dimension Theory*. Combinatorics and Partially Ordered Sets. Johns Hopkins University Press, 2001.
- [28] G. ZIEGLER : *Lectures on polytopes*. Graduate texts in mathematics. Springer-Verlag, 1995.

