

# Un tout petit peu de solfège mathématique

Laurent CLAESSENS

10 septembre 2006

Copyright (c) 2006 Claessens Laurent. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

Composé avec des logiciels libres :  
GNU/Linux



Grâce à la prodigieuse distribution Ubuntu



Et bien entendu...

*AMS-LAT<sub>EX</sub> 2<sub>ε</sub>*



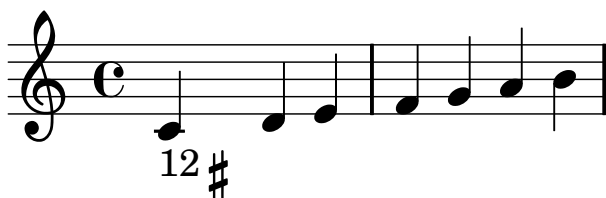
# Table des matières

<b>1</b>	<b>De la musique et de la physique</b>	<b>7</b>
1.1	La gamme de Pythagore . . . . .	7
1.2	Avant Jean-Seb . . . . .	9
1.3	La gamme de Rameau . . . . .	9
1.4	Pourquoi des rapports de longueur? . . . . .	10
<b>2</b>	<b>De la musique et de la mathématique</b>	<b>11</b>
	Avertissement . . . . .	11
2.1	L'argument intuitif . . . . .	11
2.2	Définitions de base . . . . .	12
2.3	Les gammes à dièses . . . . .	13
2.3.1	Cycle des quintes . . . . .	14
	<b>Appendix</b>	<b>17</b>
A	Des définitions de base . . . . .	17
B	Étude des dièses dans les gammes majeures . . . . .	19
B.1	Première tentative . . . . .	19
B.2	Résolution du problème . . . . .	21
B.3	Exemple . . . . .	22
B.4	Les classes d'équivalences . . . . .	22
B.5	Une petite démonstration . . . . .	25
B.6	Les gammes canoniques . . . . .	26
B.7	Le lemme des dièses . . . . .	28
C	Étude des bémols dans les gammes majeures . . . . .	29
C.1	Construction des gammes à bémols . . . . .	29
C.2	Un paradoxe apparent . . . . .	29
C.3	Le lemme des bémols . . . . .	30
D	GNU Free Documentation License . . . . .	30
	1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS . . . . .	31
	2. VERBATIM COPYING . . . . .	32
	3. COPYING IN QUANTITY . . . . .	32
	4. MODIFICATIONS . . . . .	33
	5. COMBINING DOCUMENTS . . . . .	34
	6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS . . . . .	35
	7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS . . . . .	35
	8. TRANSLATION . . . . .	35
	9. TERMINATION . . . . .	35

10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE . . . . .	35
ADDENDUM : How to use this License for your documents . . . . .	36

# Chapitre 1

## De la musique et de la physique



Disons que l'analyse qui suit ne s'adresse qu'à la musique occidentale, et montrons en sans prétention d'exhaustivité quelques bases physiques.

Dans ce qui suit, une *gamme* est un ensemble de sons se distinguant par leurs hauteurs sur lesquels ont fait de la musique ; de plus, on demande aux gammes d'être cycliques par rapport à l'octave<sup>1</sup>. Nous allons en voir deux manières de créer des gammes : celle de Pythagore qui est la gamme qui a façonné notre musique (ou bien est-ce le contraire?), et celle de Rameau qui est un genre de perfectionnement de celle de Pythagore. Bien d'autres existent, toutes ayant comme point commun d'assez bien donner les propriétés qu'on attends d'une gamme majeure ; par exemple, l'écart derrière le mi et le si est deux fois plus petit que derrière les autres.

Attention à la terminologie : par « deux gammes différentes », je n'entends *pas* par exemple les gammes de do majeur et ré majeur. Une gamme est –dans le cadre du présent texte– un ensemble de cordes dont les longueurs ont été étudiées pour avoir certaines propriétés.

### 1.1 La gamme de Pythagore

Pour autant que je le sache, il s'agit une invention de Pythagore lui-même ; en tout cas, la construction telle que donnée ici date de l'antiquité, à part peut-être la partie sur les commas ; pour celle-là, je ne sais pas du tout de quand ça date. Le but est de trouver une méthode qui permette de trouver de manière constructive les notes sur lesquelles on va jouer. Je veux dire par là qu'il s'agit de se dire : « je vais construire un instrument, de quelles longueurs doivent être les cordes ? ».

La gamme de Pythagore est basée sur les octaves et les quintes. Mettons que nous savons expérimentalement que les cordes de deux notes séparées d'une quinte ont des longueurs dont le rapport est de  $\frac{3}{2}$ . Le but étant de trouver les rapports de longueur entre les cordes, et non les longueurs en tant que telles, nous pouvons pour la simplicité ultérieure partir d'une corde de

<sup>1</sup>C'est à dire qu'à partir du moment où on sait tout entre do et le do suivant, on sait tout de tout.

longueur  $\frac{2}{3}$  et non 1 ; ça ne change rien. Ensuite, la règle que nous nous fixons est la suivante : à chaque fois que nous avons une corde, nous ajoutons une corde pour la quinte supérieure et une corde pour chacune des deux octaves. En prenant les quintes<sup>2</sup> successives, on trouve :

$$\frac{2}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}, \frac{27}{8}, \frac{81}{16}, \frac{243}{32}. \quad (1.1)$$

Maintenant, il faut se rappeler qu'une gamme est déterminée par ce qu'il se passe à l'intérieur d'une octave. Aussi, nous allons ramener toutes ces notes dans la première octave. Par exemple,  $\frac{81}{16}$  vaut un peu plus que 5. Par conséquent, elle ne fait pas partie de la première octave qui s'étend entre un et deux, mais comme nous voulons que la gamme soit cyclique pour l'octave, nous savons que l'existence d'une note dont la longueur de corde est  $\frac{81}{16}$  implique l'existence d'une note dont la longueur de corde est la moitié, la moitié de la moitié, etc. En particulier, nous avons  $\frac{81}{64}$  qui est le quart de  $\frac{81}{16}$  et qui est entre un et deux. Pas dur de se convaincre qu'en divisant par deux puis par deux puis par deux et ainsi de suite, en partant d'un nombre plus grand que deux, on passe par un *et un seul* nombre entre un et deux.

Bref, en ramenant (1.1) à la première octave, on trouve :

$$\frac{4}{3}, 1, \frac{3}{2}, \frac{9}{8}, \frac{27}{16}, \frac{81}{64}, \frac{243}{128}. \quad (1.2)$$

Ce sont les rapports de longueur de cordes d'une gamme majeure si le do a la longueur 1.

Si on les remet dans l'ordre croissant, on a (en complétant avec le do suivant à 2)

$$1, \frac{9}{8}, \frac{81}{64}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{27}{16}, \frac{243}{128}, 2. \quad (1.3)$$

Ce qui est à présent intéressant de voir, ce sont les rapports entre les notes successives. Ils sont donnés dans le tableau suivant (encore pour la frime du L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X qui fait des tableaux à l'aise<sup>3</sup>) :

Nom	Longueur de corde	Rapport avec la précédente
do <sub>1</sub>	1	
ré	9/8	9/8
mi	81/64	9/8
fa	4/3	256/243
sol	3/2	9/8
la	27/16	9/8
si	243/128	9/8
do <sub>2</sub>	2	256/243

En cas où l'indigestion de numération pointerait déjà (?), il est peut-être préférable de sauter les deux paragraphes suivants qui ne font que montrer pourquoi les demi-tons diatoniques et chromatiques diffèrent d'un comma.

Reste à savoir quelles raisons physiques font en sorte que les rapports de longueurs de cordes soient si importants en musique. Car ceci étant, on remarque dans le tableau qu'en se basant sur les quintes (en tant que rapport de longueurs de cordes), on a bien un demi-ton juste derrière le si et le mi. Un demi-ton ?? Pourtant le double de  $\frac{256}{243}$  ne vaut pas  $\frac{9}{8}$  !! Eh non ! Mais n'oublions pas que ce sont les *rappports* qui comptent. C'est à dire que pour voir ce qu'est –en terme de notes– le « double » de  $\frac{256}{243}$ , il faut faire  $\frac{256}{243} \cdot \frac{256}{243}$ , et non  $\frac{256}{243} + \frac{256}{243}$ . Et là, ça fait presque le  $\frac{9}{8}$  d'un ton complet. Presque ? Eh oui, pas tout à fait. Mais ça, on le savait déjà : les demi-tons n'existent pas en tant que tels ; ce qu'il y a, ce sont les demi-tons chromatiques et les diatoniques.

<sup>2</sup>des rapports de longueur de corde  $\frac{3}{2}$ .

<sup>3</sup>Sauf qu'ici, ça ne frime pas : le tableau est trop large, et je ne sais pas comment faire pour le centrer correctement.

On sait donc que les diatoniques sont des rapports de longueur  $\frac{256}{243}$ . Les chromatiques sont le complémentaire pour faire  $\frac{9}{8}$ , c'est à dire  $\frac{2187}{2048}$  parce que  $\frac{2187}{2048} \cdot \frac{256}{243} = \frac{9}{8}$ . Qu'est-ce que ça donne en termes de commas ? Un ton est divisé en 9 commas égaux. Mais comme toujours, par « égal », il faut entendre « rapports de longueurs égal ». Le rapport de longueur de deux cordes qui donnent des sons qui diffèrent de 1 comma est donc de  $c \simeq 1.013173014$ . C'est à dire la racine neuvième de  $\frac{9}{8}$ . En effet, 9 commas donnent un rapport de longueur  $c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c = \frac{9}{8}$ . Combien de comma fait un demi-ton diatonique, dans cette construction ? Il faut voir combien de fois il faut multiplier  $c$  par lui même pour obtenir  $\frac{256}{243}$ . Ce ne sera évidemment pas un chiffre rond. Ce qu'il faut résoudre, c'est

$$c^x = \frac{256}{243}.$$

La réponse est 3,98. Bien malin qui aura une oreille qui remarquera la faute de 0.02 comma entre le demi-ton théorique et le demi-ton de 4 commas qu'on apprend à l'école !

La chose à retenir est la suivante : si on accepte que la base de la musique est le rapport de longueur de corde de  $\frac{3}{2}$ , alors il est automatique d'avoir une gamme qui comporte exactement l'alternance de tons et demi-tons qu'on connaît aux gammes majeures<sup>4</sup>. Et de plus, la différence entre les demi-tons chromatiques et diatoniques vient naturellement. Contrairement donc aux nomenclatures, aux règles de grammaires, aux commandes contre-intuitives du Word et aux unités hors SI, une bonne partie des subtilités du solfège ne sont pas faites *exprès* pour donner des cheveux blancs à nos petites têtes blondes.

## 1.2 Avant Jean-Seb

La gamme de Pythagore possède toutes les propriétés physique qu'il faut pour faire des quintes. Si mes souvenirs sont bons, une analyse plus poussée montre que les tierces ne vont pas très bien (les accords parfaits majeurs foirent !). Pire : les transpositions sont impossibles. En effet, si on écrit une mélodie qui part de do, et qu'on essaye de la réécrire en partant de sol, il faudra un fa $\sharp$ . Mais cette note n'existe pas dans la gamme construite<sup>5</sup>.

Si on ne peut pas faire d'accords, ni de transpositions, on s'imagine bien que la musique serait assez limitée. En fait, la gamme de Pythagore est hostile à quasiment tout style d'harmonie.

On a alors inventé toute une série de gammes qui essayaient de tricher un peu : en décalant un peu chaque note de leur position « idéale », on a pu obtenir des gammes qui étaient plus ou moins correctes. Mais rien d'extraordinaire. En particulier, il est impossible de jouer les 24 préludes et fugues du Clavier bien tempéré d'affilée, sur le même instrument et sans s'arrêter pour le raccorder de temps en temps. Si le livret de mon CD ne me trompe pas, c'était un sacré grand moment de frime quand Jean-Seb y parvint !

## 1.3 La gamme de Rameau

C'est la gamme utilisée actuellement, celle qui résoud le mieux le problème d'harmonie posé par la gamme de Pythagore. Il ne fallut pas plus de deux fois 24 préludes et fugues, ainsi que tout le poids de Bach et Rameau dans le monde de la musique pour l'imposer (pour dire que ce n'était pas grand chose). Mais la construction est simple. Il s'agit bêtement de diviser l'octave en douze

<sup>4</sup>L'auteur avoue sa perplexité face aux gammes mineures dont il n'a pas encore bien saisi le sens physique.

<sup>5</sup>On pourrait croire palier à cette difficulté en prenant en guise de fa $\sharp$ , la longueur de fa multipliée par  $\frac{256}{243}$ , qui est le demi-ton honnêtement construit. C'est vrai, mais c'est une emplâtre sur une jambe de bois : ce qu'il faudrait, c'est voir ce qu'on obtient comme gamme en commençant la construction à partir du fa au lieu du do. Et là, on voit que ça foire.

intervalles égaux. Par « égaux », il faut comme toujours entendre « rapports de longueurs de corde égaux ». Alors, c'est pas dur : le rapport de longueur entre deux cordes est de  $d = \sqrt[12]{9} \simeq 1.05946$ . Et on note que la valeur de ce demi-ton est vraiment pas loin de celle du demi-ton de Pythagore (cf plus haut). Dans cette gamme, il n'y a bien entendu aucune note à exactement  $\frac{4}{3}$  et  $\frac{3}{2}$  de la fondamentale ; c'est à dire que les quartes et les quintes sont fausses. Mais elles ne sont pas assez fausses pour sérieusement titiller des oreilles humaines normalement constituées<sup>6</sup>.

Par contre, il est trivial que cette gamme se transpose parfaitement : en multipliant toutes les longueurs par  $d$ , on transpose la mélodie d'un demi-ton, et on ne tombe que sur des notes qui existent déjà. Ceci par opposition à la gamme de Pythagore où en multipliant toutes les notes par le demi-ton  $\frac{256}{243}$ , on tombe sur des notes qui n'existent pas.

Dans cette gamme, il n'y a qu'un seul type de demi-ton. Le coup du diatonique et du chromatique n'est donc finalement bien qu'un croquemitaine destiné à faire peur aux enfants : ça fait pas loin de 300 ans qu'on n'utilise exclusivement la gamme de Rameau.

Maintenant, on comprends pourquoi les instruments de musique ont toujours<sup>7</sup> une belle forme courbe : il s'agit à chaque fois d'une exponentielle.

## 1.4 Pourquoi des rapports de longueur ?

C'est ici qu'intervient la physique. Qui dit « longueur de corde » dit « fréquence fondamentale ». Et si deux notes ont des fondamentales dont les fréquences sont en rapports simples (fraction d'entiers pas trop grands), alors les notes auront des harmoniques communes. Or une corde vibre toujours avec sa fondamentale et ses harmoniques (ainsi que démontré dans le sens mathématique du terme au printemps de sciences 2001, et à un TP d'analyse un peu plus tôt<sup>8</sup>). Et il se fait que l'oreille interne décompose les sons qu'elle reçoit en ses harmoniques. La morphologie humaine est donc ainsi faite qu'il est *a priori* pas étonnant que les rapports de fréquences soient la base de notre appréhension des sons. Lorsque deux sons ont des harmoniques communes, on le remarque donc tout de suite (je veux dire par là que notre cerveau a tout de suite l'information ; il n'est pas *évident* que nous en ayons conscience). Ensuite, il faudra voir le lien entre « on remarque tout de suite les harmoniques communes » et « c'est joli d'avoir des harmoniques communes ». Mais ça, c'est une histoire qui risque d'être nettement plus compliquée. Surtout que, contrairement à ce que la physique semble indiquer, il n'y a pas que les accords parfaits majeurs, dans la vie.

---

<sup>6</sup>sauf paraît-il certains phénomènes qui se rencontrent généralement avec un violon. Vois-tu pourquoi le problème se pose plus au violon qu'au piano par exemple ?

<sup>7</sup>et quand ça ne se voit pas du premier coup d'oeil, c'est caché, mais ça y est !

<sup>8</sup>Un très joli raisonnement que la résolution de l'équation d'onde par transformée de Fourier.

## Chapitre 2

# De la musique et de la mathématique

### Avertissement

Ce chapitre *n'est pas* une « explication mathématique de la musique ». Ceci n'est qu'une *description* mathématique de certains faits liés à l'étude des dièses et bémols dans les gammes majeures. La question que nous nous proposons d'étudier ici est « jusqu'à quel point les règles utilisées par les musiciens peuvent se déduire de principes simples ne faisant pas appel à des arguments musicaux ? » Dans le cas de notre étude des dièses et bémols dans les gammes majeures, nous allons voir que la réponse est que *toute la structure des gammes majeures peut se déduire de la seule structure «  $1, 1, \frac{1}{2}, 1, 1, 1, \frac{1}{2}$  »*. C'est à dire que nous démontrons qu'il n'existe pas de gammes autres que celles utilisées en musique, en nous basant uniquement sur une définition simple d'une gamme : même en allant chercher des trucs incroyables, il n'y a pas moyen d'inventer de nouvelles gammes majeures que les 12 qu'on connaît en musique.

Ce texte est à prendre comme un traité de solfège mathématique plutôt que de théorie de la musique. Il n'est pas question de démontrer un théorème selon lequel les sonates de Haydn sont ennuyeuses.

### 2.1 L'argument intuitif

Ceci est l'argument que l'on devrait trouver dans les livres pour enfants. Le truc à démontrer est que « pour une gamme majeure quelconque, le dernier dièse à l'armure est sur la sensible ». Par exemple, le dernier dièse de solM est le fa $\sharp$  qui est bien un demi-ton au-dessous du sol.

*Démonstration.* Prenons une certaine note  $x$  et considérons la gamme de  $xM$ . Il s'agit de remarquer que la gamme de  $(x+\text{quinte})M$  aura la même armure, plus un dièse sur  $(x+\text{quarte})$ . Or,  $(x+\text{quarte})\sharp$  est bien la sensible de  $(x+\text{quinte})M$ .  $\square$

Le point faible de cette démonstration est qu'elle ne dit pas si on peut ajouter deux dièses *simultanément* de façon à créer une gamme à deux dièses ailleurs que sur fa etdo.

## 2.2 Définitions de base

La structure à étudier est la suivante :

$$\begin{array}{cccccccc} \text{do} & \rightarrow & \text{ré} & \rightarrow & \text{mi} & \rightarrow & \text{fa} & \rightarrow & \text{sol} & \rightarrow & \text{la} & \rightarrow & \text{si} \\ & & 1 & & 1 & & \frac{1}{2} & & 1 & & 1 & & 1 \end{array}$$

avec la relation de « cyclicité »  $\mathbb{R}/6$  qui est défini par la relation d'équivalence  $x \sim y$  ssi  $x - y \in 6\mathbb{N}$ . Pour la simplicité et la relation avec le solfège connu de toutes et tous, nous notons

$$\begin{aligned} \text{do} &= 0 \\ \text{ré} &= 1 \\ \text{mi} &= 2 \\ \text{fa} &= 2.5 \\ \text{sol} &= 3.5 \\ \text{la} &= 4.5 \\ \text{si} &= 5.5 \end{aligned} \tag{2.1}$$

et l'ensemble  $E = \{\text{do}, \text{ré}, \text{mi}, \text{fa}, \text{sol}, \text{la}, \text{si}\}$ . Quand  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $x\sharp = x + 1/2$  et  $[x] = \{x + 6n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ . Une **note** est un nombre demi-entier et un **degré** est une classe d'une note dans  $\mathbb{R}/6$ . L'ensemble des notes est noté  $\mathbb{S}$ . Une **pré-gamme** est un ensemble de 7 notes de la forme  $E + a$ ,  $a \in \mathbb{S}$ . Le minimum d'une pré-gamme est appelé la **fondamentale** de la pré-gamme. Par exemple  $E + 0.5 = \{0.5, 1.5, 2.5, 3, 4, 5, 6\}$  est la pré-gamme de 0.5. Lorsque  $x \in \mathbb{S}$ , on note  $PG(x)$  la pré-gamme de  $x$ .

Une **gamme** est un ensemble de 7 éléments différents de  $\mathbb{S}/6$  tel qu'en choisissant correctement un représentant de chaque, on puisse construire une pré-gamme. On parle de pré-gamme *extraite* de la gamme

Afin de pouvoir parler de fondamentale d'une gamme, il faut prouver une certaine unicité à la pré-gamme extractible depuis une gamme donné. Plus précisément, on a la proposition suivante.

**Proposition 2.2.1.** *Soit  $A$ , une gamme et  $P_1, P_2$ , deux pré-gammes que l'on peut extraire de  $A$ . Alors, il existe un  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $P_2 = P_1 + 6n$ . C'est à dire qu'essentiellement,  $P_1 = P_2$ .*

*Démonstration.* Soient  $a_1$  et  $a_2$  les fondamentales de  $P_1$  et  $P_2$ . À une refinition près, on peut supposer qu'ils sont les plus petits positifs de leur classe, c'est à dire que  $a_i - 6 < 0$ . Sans perte de généralité, on peut supposer  $a_1 < a_2$ . D'abord,  $a_2 \in PG(a_1)$  parce que  $PG(a_1)$  contient 7 notes étalées entre  $a_1$  et  $a_1 + 5.5$ , mais  $A$  ne contient que 7 classes différentes, donc  $[a_2] \in [PG(a_1)]$ .

Maintenant on utilise la structure explicite (2.1) pour montrer que si  $a_1 \neq a_2 \in PG(a_1)$ , alors  $PG(a_2)$  contient de notes qui ne sont pas dans  $A$ . En effet, si  $a_2 = a_1 + 1$ , alors  $PG(a_2)$  contient par exemple  $a_1 + 6.5$  qui n'est dans la classe d'aucun élément de  $PG(a_1)$ . Les autres impossibilités se démontrent de la même manière :

- si  $a_2 = a_1 + 2$ , alors  $a_1 + 7.5 \in PG(a_2)$  et n'est pas dans  $[PG(a_1)]$ ,
- si  $a_2 = a_1 + 2.5$ , alors  $a_1 + 5.5 \in PG(a_2)$  et n'est pas dans  $[PG(a_1)]$ ,
- si  $a_2 = a_1 + 3.5$ , alors  $a_1 + 9 \in PG(a_2)$  et n'est pas dans  $[PG(a_1)]$ ,
- si  $a_2 = a_1 + 4.5$ , alors  $a_1 + 6.5 \in PG(a_2)$  et n'est pas dans  $[PG(a_1)]$ ,
- si  $a_2 = a_1 + 5.5$ , alors  $a_1 + 6.5 \in PG(a_2)$  et n'est pas dans  $[PG(a_1)]$ .

Donc aucun  $x \in PG(a_1)$  différent de  $a_1$  lui-même n'a de pré-gamme contenue dans extractible de  $[PG(a_1)] = A$ , ce qui est une contradiction parce qu'on a supposé que  $PG(a_1)$  et  $PG(a_2)$  étaient des pré-gammes extractibles de  $A$ . Donc  $a_1 = a_2$ . □

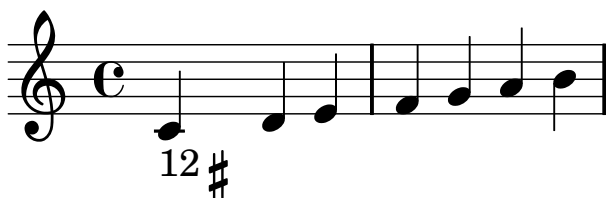
Maintenant on peut parler de la **fondamentale** d'une gamme  $A$  comme étant la classe de la fondamentale de la pré-gamme extractible de  $A$ . Par abus de langage, si  $[x]$  est la fondamentale de  $A$ , le plus petit positif contenu dans  $[x]$  sera aussi appelé *fondamentale* de la gamme  $A$ .

## 2.3 Les gammes à dièses

On dit qu'une gamme  $A$  est une **gamme à dièses** si elle peut s'obtenir par adduction de dièses sur  $E$ . C'est à dire si  $A = \bigcup_{x \in E} [x + \frac{d(x)}{2}]$  pour une certaine fonction  $d : E \rightarrow \mathbb{Z}$ . La première constatation évidente est que toutes les gammes peuvent sont des gammes à dièses. En effet si  $a \in \mathbb{S}$  est la fondamentale de la gamme  $A$ , on a évidemment

$$PG(a) = \{\text{do} + 2a\sharp, \text{ré} + 2a\sharp, \text{mi} + 2a\sharp, \text{fa} + 2a\sharp, \text{sol} + 2a\sharp, \text{la} + 2a\sharp, \text{si} + 2a\sharp\}$$

et comme toujours  $A = [PG(a)]$ . Une importante remarque est qu'il existe plusieurs manières d'obtenir la même gamme en ajoutant des dièses. Par exemple avec 12 dièses, on peut former



ou bien



qui sont toutes deux des gammes de do.

**Proposition 2.3.1.** *Si  $A$  est une gamme, alors il existe une et une seule manière de placer un dièse supplémentaire afin d'obtenir une nouvelle gamme.*

*En l'occurrence, si  $A$  est la gamme de  $a$ , il faut placer le dièse sur  $a + 2.5$  pour obtenir la gamme de  $a + 3.5$ .*

*Démonstration.* Prenons la gamme de  $[a]$ , c'est à dire

$$A = \{[a], [a + 1], [a + 2], [a + 2.5], [a + 3.5], [a + 4.5], [a + 5.5]\}$$

Comme toute la démonstration se base sur des intervalles, on peut supposer sans perte de généralité que  $a = 0$  (le vérifier!). Passons donc en revue les pré-gammes obtenues par adjonction d'un dièse sur  $E$ . Si on ajoute un dièse sur ré, mi, sol, la ou si, on crée un intervalle de 1.5, et donc l'ensemble obtenu ne peut pas être une pré-gamme. Si on ajoute sur do, on trouve quatre intervalles d'affilée de 1. Il est facile de vérifier qu'ajouter un dièse sur fa donne bien la gamme de sol.

□

### 2.3.1 Cycle des quintes

La proposition 2.3.1 suggère de construire les gammes par récurrence en partant de  $E$ . On obtient successivement

0.  $[0] = \text{do}$
1.  $[3, 5] = \text{sol}$
2.  $[7] = [1] = \text{ré}$
3.  $[4, 5] = \text{la}$
4.  $[8] = [2] = \text{mi}$
5.  $[5, 5] = \text{si}$
6.  $[9] = [3] = \text{fa}\sharp$
7.  $[6, 5] = [0, 5] = \text{do}\sharp$
8.  $[4] = \text{sol}\sharp$
9.  $[7, 5] = [1, 5] = \text{ré}\sharp$
10.  $[5] = \text{la}\sharp$
11.  $[8, 5] = [2, 5] = \text{mi}\sharp = \text{fa}$
12.  $[6] = [0] = \text{do}$

La boucle est bouclée à partir de 11. Il existe 12 gammes en tout, et toutes les gammes construites sur base d'un élément de  $\mathbb{S}$  sont une de celles-là.

Une gamme peut toujours être écrite sous la forme

$$\bigcup_{x \in E} [x + d(x)]$$

pour une certaine fonction  $d : E \rightarrow \mathbb{Z}$ . La même gamme peut être obtenue avec plusieurs fonctions différentes. Par exemple les vecteurs suivants sont équivalents :

$$d = (12, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{2.2a}$$

$$d' = (2, 2, 1, 2, 2, 2, 1) \tag{2.2b}$$

$$d'' = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \tag{2.2c}$$

Les **vecteurs canoniques** sont les vecteurs naturellement fournis par la proposition, et un vecteur canonique est dit *restreint* si c'est un des douze premiers :

$$d_0 = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \quad (2.3a)$$

$$d_1 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.3b)$$

$$d_2 = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.3c)$$

$$d_3 = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 0) \quad (2.3d)$$

$$d_4 = (1, 0, 0, 1, 1, 0, 0) \quad (2.3e)$$

$$d_5 = (1, 1, 0, 1, 1, 0, 0) \quad (2.3f)$$

$$d_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0) \quad (2.3g)$$

$$d_7 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1) \quad (2.3h)$$

$$d_8 = (1, 1, 1, 2, 1, 1, 1) \quad (2.3i)$$

$$d_9 = (2, 1, 1, 2, 1, 1, 1) \quad (2.3j)$$

$$d_{10} = (2, 1, 1, 2, 2, 1, 1) \quad (2.3k)$$

$$d_{11} = (2, 2, 1, 2, 2, 1, 1) \quad (2.3l)$$

$$(2.3m)$$

La question de l'unicité de la gamme à  $n$  dièses est celle-ci : si

$$A = \bigcup_{x \in E} [x + d(x)]$$

$$A' = \bigcup_{x \in E} [x + d'(x)]$$

avec  $\sum_x d(x) = \sum_x d'(x)$ , est-ce que  $A = A'$  ? On peut très rapidement répondre à la question pour les pré-gammes.

**Théoreme 2.3.2.** *Si*

$$P = \bigcup_{x \in E} (x + d(x))$$

avec  $\sum_{x \in E} d(x) = n$  est une pré-gamme, alors c'est la pré-gamme de  $n/14$ . En particulier, si  $n/14 \notin \mathbb{S}$ , alors il n'existe pas de pré-gamme avec  $n$  dièses .

*Démonstration.* Mettons que  $P$  soit la pré-gamme de  $a \in \mathbb{S}$ , alors

$$P = \{a, a + 1, a + 2, a + 2.5, a + 3.5, a + 4.5, a + 5.5\}.$$

On a directement que

$$\sum_{x \in E} \left( x + \frac{d(x)}{2} \right) = a + (a + 1) + \dots + (a + 5.5) = 7a + 19,$$

mais d'autre part, cette même somme vaut

$$\sum_x x + \sum_x \frac{d(x)}{2} = 19 + \frac{n}{2}.$$

En égalisant les deux expressions, on trouve que  $a = n/14$ .

□

Notons au passage le résultat comme quoi si  $\{a_i\}$  est une pré-gamme de fondamentale  $a$ , alors  $\sum_{i=1}^7 a_i = 7a + 19$ , c'est à dire que la fondamentale d'une pré-gamme peut être aisément retrouvée à partir de la somme de ses notes par la formule

$$a = \frac{1}{7} \left( \sum_i a_i - 19 \right). \quad (2.4)$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration de l'unicité de la gamme à  $n$  dièses pour tout entier  $n$ . Soient donc

$$A = \bigcup_{x \in E} [x + d(x)] \quad (2.5a)$$

et

$$A' = \bigcup_{x \in E} [x + d'(x)] \quad (2.5b)$$

telles que

$$\sum_{x \in E} d(x) = \sum_{x \in E} d'(x) = n.$$

Soient  $P$  et  $P'$  les pré-gammes de  $A$  et  $A'$ . Notons tout de suite que  $P$  n'est pas spécialement égale à  $\bigcup_x (x + d(x))$  comme le montre l'exemple  $d = (0, 12, 0, 0, 0, 0, 0)$ , dont le vecteur de  $P$  est en fait  $d_P = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$ . Par contre, il existe deux fonctions  $m, m' : E \rightarrow \mathbb{Z}$  telles que

$$P = \bigcup_{x \in E} x + d(x) + 12m(x), \quad (2.6a)$$

$$P' = \bigcup_{x \in E} x + d'(x) + 12m'(x). \quad (2.6b)$$

Si on désigne par  $a$  et  $a'$  les fondamentales de  $P$  et  $P'$ , la formule (2.4) donne

$$\begin{aligned} a - a' &= \frac{1}{7} \left( n + 12 \sum_x m(x) \right) - \frac{1}{7} \left( n + 12 \sum_x m'(x) \right) \\ &= \frac{12}{7} \sum_x (m - m')(x). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Étant donné que  $a, a' \in \mathbb{S}$ , on sait que  $a - a' \in \mathbb{S}$ , et en particulier que  $2(a - a') \in \mathbb{Z}$ . Il faut donc que  $\sum (m - m')(x) = 7k$  pour un certain  $k \in \mathbb{Z}$ . Dans ce cas,  $a - a' = 12k$ , mais comme  $a - a' < 6$ , on doit avoir  $k = 0$ , et donc  $a = a'$ , ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons toutefois que  $A = A'$  n'implique pas  $n = n'$ .

# Appendix

## A Des définitions de base

À partir de maintenant, nous nous plaçons dans le cadre des gammes majeurs. C'est pourquoi nous dirons simplement « gamme ».

**Définition A.1.** Une gamme est une suite de nombres réels

$$\{a, b, c, d, e, f, g, a2, b2, c2, \dots\}$$

tels que

$$\begin{aligned} b &= a + 1 \\ c &= b + 1 \\ d &= c + \frac{1}{2} \\ e &= d + 1 \\ f &= e + 1 \\ g &= f + 1 \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A.8}$$

Cette gamme est appelée gamme de  $a$ .

**Définition A.2.** Dans le même ordre d'idée, on définit une note comme étant simplement un nombre réel. Les degrés de la gamme se définissent facilement : la fondamentale est la première note, la sensible est la septième (dans l'ordre croissant),...

Les intervalles se définissent simplement :

**Définition A.3.** Les intervalles sont également des nombres ( $\mathbb{R}$  est muni d'une distance naturelle) : quinte=3.5, octave=6,...

Les altérations sont simplement de la notation :

$$x\sharp = x + \frac{1}{2}, \quad x\flat = x - \frac{1}{2}. \tag{A.9}$$

Toutes ces définitions ont des motivations soflégiques évidentes, je l'espère.

Nous pouvons noter dès à présent que grâce aux relations of définition A.1, une gamme est entièrement déterminée par sa fondamentale.

*Remarque A.4.* Il est peut-être important de souligner un point. La notion de gamme définie ici n'est pas *exactement* la même que celle utilisée en musique. En effet, en musique, les gammes sont cycliques dans les deux sens, pas ici. En cela, nous voulons dire que la gamme de  $x$  n'est pas la même que celle de  $x$ +octave, ni que celle de  $x$ -octave, alors toutes trois sont indentiques.

D'autre part, les notes désignent ici des nombres réels précis. lorsqu'on dit, en musique : « je met un dièse sur le do », on entend qu'on met un dièse sur *tous* les do de la gamme (sens musical). Le problème est qu'en musique, on utilise le même terme « do » pour désigner parfois une note particulière, parfois toutes les notes du même nom.

La première remarque se résout facilement en passant aux classes d'équivalences, en disant que deux gammes sont équivalentes *ssi* elles ont des fondamentales éloignées d'un nombre entier d'octaves.

La seconde remarque est plus compliquée à résoudre, vu que les musiciens utilisent le même mot pour deux concepts différents. Si on veut donner un sens précis à la phrase « mettre un dièse sur le do », il suffit de passer aux classes d'équivalences, et dire que deux notes sont équivalentes *ssi* elles sont éloignées d'un nombre entier d'octave. Il faudrait alors définir l'intervalle entre deux classes d'équivalences. Bref, ça ferait pas mal de travail. Alors qu'il suffit d'accepter un abus de langage : quand on dit qu'on prends « la gamme avec un dièse supplémentaire sur  $x$  », nous entendons « la gamme avec des dièses supplémentaires sur  $x$ ,  $x$ +octave,  $x$ +2octaves,... ». C'est pour répondre à ce problème que la distinction « note  $\neq$  degré » est faite.

Maintenant, nous allons amener des concepts un poil plus abstraits.

On va désigner par  $\mathcal{G}$  l'ensemble des gammes. Bien entendu,  $\mathcal{G}$  et  $\mathbb{R}$  sont en bijection parce que une gamme est entièrement définie par sa fondamentale qui peut être n'importe quel nombre réel.

**Définition A.5.** Si  $R$  est une gamme, alors, on désigne par  $\mathcal{G}(R)$  l'ensemble des gammes  $S$  telles que

1.  $S$  peut obtenir en ajoutant des dièses sur des notes d'une queue de suite de  $R$ .
2. Il existe un  $n \in \mathbb{N}$  tel que les notes de  $S$  ont soit  $n$ , soit  $n + 1$  dièses.

Au cas où la lectrice ne saurait pas ce qu'est une *queue de suite*, nous le définissons ici. Ce n'est pas dur : comme son nom l'indique, une queue de suite d'une suite  $(x_1, x_2, \dots)$  est la même suite mais commencée plus loin ; par exemple  $(x_5, x_6, \dots)$ .

Dans notre cas, c'est utile de préciser que les gammes obtenues par adjonction de dièses sont des queues de suites parce que par exemple, la gamme obtenue en ajoutant un dièse à

$$\{\text{do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', ré', mi', \dots}\}$$

est

$$\{\text{sol, la, si, do', ré', mi', fa'\sharp, sol' \dots}\}.$$

Lors de la seconde tentative, nous trouverons des définitions plus puissantes qui feront en sorte de ne plus avoir ce problème de queue de suite.

Quand nous parlerons de « la gamme à  $n$  dièses dans  $\mathcal{G}(R)$  », nous parlerons des gammes de  $\mathcal{G}(R)$  qui ont  $n$  dièses *en plus* que  $R$ .

Le point 2 revient à exclure les gammes éventuelles dans lesquelles nous mélangerions des notes portants 3 dièses à des notes sans aucun dièses. Ceci permet de ne pas avoir à considérer des notes qui s'inversent à force d'ajouter des dièses à l'une et pas à l'autre. Il faudrait encore réfléchir si cette condition est nécessaire, c'est à dire voire si de telles gammes existent. Ceci sera

important dans la démonstration du lemme B.4. Il se fait que de telles gammes existent ; voir l'exemple de la page 22.

À partir de la page 21, nous allons pouvoir nous passer de cette encombrante seconde condition. La sous-section B.1 peut-être sautée : tout sera refait à partir de B.2, justement pour corriger ce problème. La « première tentative peu fructueuse » reste dans ce document pour des raisons anti-didactiques : montrer qu'en prenant un problème par un mauvais bout, des démonstrations très compliquées peuvent mener à des résultats pas très satisfaisants, alors qu'un simple déclic permet d'obtenir des résultats nettement plus complets, avec des techniques plus simples. Le rapport entre la puissance d'une démonstration et sa difficulté, entre autres paramètres, est ce qu'on appelle l'*esthétique* d'une théorie. Nous voyons ici que l'étude des dièses possède une méthode moche et une méthode plus jolie.

## B Étude des dièses dans les gammes majeures

### B.1 Une première tentative peu fructueuse

**Lemme B.1.** *Soit  $R$ , une gamme, que nous considérons sans dièses et dont la fondamentale est  $a$ . Alors il n'existe qu'une seule gamme  $R_{\sharp} \in \mathcal{G}(R)$  possédant un seul dièse<sup>1</sup>. De plus, cette gamme est la gamme de  $a$ +quinte et possède son unique dièse sur  $a$ +quarte.*

*Démonstration.* La démonstration n'est pas difficile : il suffit de vérifier qu'il n'y a pas moyen de mettre le dièse autre part. Nous pouvons toujours définir les nombres  $b, c, d, e, f, g, a', b', \dots$  formant la gamme.

$$a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{1} c \xrightarrow{\frac{1}{2}} d \xrightarrow{1} e \xrightarrow{1} f \xrightarrow{1} g \xrightarrow{\frac{1}{2}} a' \xrightarrow{1} b' \dots \quad (\text{B.10})$$

Placer un des dièses sur une des notes  $b, c, e, f, g, b', \dots$ , provoquerait des intervalles de  $\frac{3}{2}$ , ce qui n'existe pas dans une gamme. D'autre part, avec un dièse sur  $a$ , ça ne marche pas non plus, car nous aurions alors deux intervalles de  $\frac{1}{2}$  trop rapprochés. Il reste à vérifier ce que donne un dièse sur  $d$ .

$$a \xrightarrow{1} b \xrightarrow{1} c \xrightarrow{1} d_{\sharp} \xrightarrow{\frac{1}{2}} e \xrightarrow{1} f \xrightarrow{1} g \xrightarrow{\frac{1}{2}} a' \xrightarrow{1} b' \dots \quad (\text{B.11})$$

Là, c'est clair qu'en partant de  $e$ , on a bien une gamme avec les intervalles comme il faut. Bref, la seule gamme avec un seul dièse de  $\mathcal{G}(R)$  est  $\{e, f, g, a', b', c', d'_{\sharp}, \dots\}$ , où l'on remarque que le dièse supplémentaire est bien sur la quarte de  $a$ , et que la fondamentale est bien la quinte de  $a$ .

□

Ce lemme permet de définir, par récurrence, une suite de gammes construites à partir de  $R$  (c'est à dire, une application  $\mathbb{N} \rightarrow \mathcal{G}(R)$ , la définition classique d'une suite, quoi!).

**Définition B.2.** *Soit  $R$ , une gamme. Nous désignons par  $R_{\sharp}$  la gamme à un dièse de  $\mathcal{G}(R)$ , par  $R_{2\sharp}$  celle à un dièse de  $\mathcal{G}(R_{\sharp})$ . Toutes ces gammes, grâce au lemme B.1, sont parfaitement bien définies à partir de la donnée de  $R$  (qui dans le cas musical est bien sûr  $\text{doM}$ ).*

*Plus généralement, nous désignons par  $R_{n\sharp}$  la gamme à un dièse de  $\mathcal{G}(R_{(n-1)\sharp})$ .*

<sup>1</sup>C'est une tournure de phrase classique en mathématique : ça signifie que dans  $\mathcal{G}(R)$ , il n'existe qu'une seule gamme possédant qu'un seul dièse, et que cette gamme on l'appelle  $R_{\sharp}$ .

Les musiciens reconnaissent-là les gammes usuelles doM, solM, RéM,...

**Définition B.3.** *Nous allons dire que ces gammes sont les gammes canoniques dans  $\mathcal{G}(R)$ , ou simplement les gammes canoniques si le contexte ne donne pas d'ambiguïté sur  $R$ . Nous désignons par  $\mathcal{C}(R)$ , l'ensemble des gammes canoniques de  $R$ .*

Le prochain pas sera la démonstration du fait que  $\mathcal{C}(R) = \mathcal{G}(R)$ . C'est à dire que les seules gammes que l'on peut construire à partir de  $R$ , par simple ajouts de dièses sont les gammes canoniques. Ceci justifiera l'emploi du singulier dans des phrases du style de « la gamme à trois dièse est laM ».

Notons d'emblée que le lemme B.1 donne tout de suite l'unicité de la gamme à un dièse dans  $\mathcal{G}(R)$  : c'est  $R_{\sharp}$  et aucune autre. Quand on a trop l'habitude de travailler avec des gammes en musique, on peut se dire qu'il n'y a *évidemment* qu'une seule gamme à deux dièses : à partir d'une gamme, il n'y a qu'une seule façon de rajouter un dièse (ce qu'on vient de démontrer), et donc, on a une seule gamme à un dièse, et par conséquent une seule à deux car il n'y a qu'une façon d'ajouter un dièse à la gamme à un dièse. Eh bien ce raisonnement est faux (bien que la conclusion soit juste).

Il pourrait *a priori* y avoir moyen d'ajouter deux dièses d'un seul coup. C'est à dire trouver une gamme à deux dièses qui ne sont n'est pas spécialement une gamme qui s'obtient par ajout d'un dièse à une autre gamme à un dièse. Pour démontrer qu'une telle gamme n'existe pas, nous allons procéder en plusieurs étapes (bien que nous croyons qu'il devrait avoir moyen d'aller plus vite ; la théorie n'est pas encore achevée).

**Lemme B.4.** *Soit  $R$ , une gamme dont les notes sont*

$$\{do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', ré', \dots\}.$$

*Alors, les gammes de  $\mathcal{G}(R)$  qui possèdent au moins un dièse ont au moins un dièse sur le fa.*

*Démonstration.* Démonstration par l'absurde. Supposons que l'on aie pas de dièse sur fa. Alors, les autres notes ont au plus un dièse chacune par la définition A.5. On déduit tout de suite qu'il ne peut pas y avoir de dièse sur le mi : nous aurions alors un intervalle zéro.

D'autre part, il est impossible de mettre un dièse sur sol, la ou si, sinon nous aurions des intervalles de  $\frac{3}{2}$  que nous devrions diminuer en ajoutant un dièse sur la note au-dessous. De proche en proche, on est obligé de mettre un dièse sur fa. Nous ne pouvons pas non plus en mettre sur le ré, sinon nous aurions eux intervalles d'affilés valant  $\frac{1}{2}$ . Reste do. Eh bien ! en mettre un sur do ne va pas non plus : il y aurait quatre intervalles de 1 d'affilés. Mais sur le fa, par contre, ça va très bien.  $\square$

Nous pouvons à présent démontrer le théorème principal pour l'instant.

**Théorème B.5.** *Si  $R$  est une gamme, alors nous avons*

$$\mathcal{G}(R) = \mathcal{C}(R). \tag{B.12}$$

*Démonstration.* Nous nommons les notes de  $R$  par  $\{do, ré, mi, fa, sol, la, si, do', ré', \dots\}$

**L'amorce** Montrons pour commencer que la seule gamme à deux dièse de  $\mathcal{G}(R)$  est la gamme canonique  $R_{2\sharp}$ . C'est évident car une gamme  $S$  à deux dièse dans  $\mathcal{G}(R)$  possède au moins un dièse sur fa. Comme les deux dièses ne peuvent pas être sur fa,  $S$  est la gamme à un dièse de  $\mathcal{G}(R_{\sharp})$  : celle qui possède un dièse de plus que  $R_{\sharp}$ , et la gamme à un dièse de  $\mathcal{G}(R_{\sharp})$ , c'est  $R_{2\sharp}$  ; voir le lemme B.1 et la définition qui suit.

**La récurrence** Ensuite, nous allons par récurrence. Soit  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons que, pour toute gamme  $T$ , la seule gamme à  $n$  dièses de  $\mathcal{G}(T)$  soit la gamme canonique  $T_{n\sharp}$ . Nous montrons alors que la seule gamme de  $\mathcal{G}(R)$  à  $n+1$  dièses est la gamme canonique  $R_{(n+1)\sharp}$ . Soit  $S$ , une gamme de  $\mathcal{G}(R)$  à  $n+1$  dièses. Nous devons démontrer que  $S = R_{(n+1)\sharp}$ . Par le lemme B.4, nous savons que  $S$  possède au moins un dièse sur fa. Par conséquent,  $S \in \mathcal{G}(R_{\sharp})$ . Plus précisément,  $S$  est une gamme à  $n$  dièses de  $\mathcal{G}(R_{\sharp})$ . Mais, nous avons supposé que  $\mathcal{G}(R_{\sharp})$  ne possédait qu'une seule gamme à  $n$  dièses<sup>2</sup>. Donc,  $S$  est bien la gamme obtenue par ajout d'un dièse à partir de la gamme  $R_{n\sharp}$ , et cet ajout étant unique,  $S$  est bien la gamme canonique  $R_{(n+1)\sharp}$ .

Ce que nous avons démontrés c'est que si à partir d'une gamme quelconque, il n'existe qu'une seule gamme à  $n$  dièses, alors à partir de  $R$ , il n'existe qu'une seule gamme à  $n+1$  dièses.

**Explications** Maintenant, les gens qui savent le principe de démonstration par récurrence ont compris qu'en remarquant que  $R$  est quelconque et que la propriété est déjà démontrée pour  $n=2$ , le théorème est démontré. Pour les autres...

Démontrons qu'il n'existe qu'une seule gamme à trois dièses dans  $\mathcal{G}(R)$ . Par l'amorce de la récurrence, nous savons ( $R$  est quelconque) qu'une seule gamme à deux dièses existe dans  $\mathcal{G}(R)$ . La récurrence, pour  $n=2$  montre que n'ayant qu'une gamme à deux ( $n$ ) dièses à partir d'une gamme quelconque, nous avons une seule gamme à trois ( $n+1$ ) dièses à partir de  $R$ .

De la même manière, on démontre qu'il n'y a qu'une seule gamme à quatre, puis cinq,...

□

## B.2 Résolution du problème

Ce qui a été dit dans la première tentative est juste, mais ne donne pas de démonstrations complète de l'unicité d'une gamme à  $n$  dièses. Il y a en fait un argument très simple pour cela. Il suffit d'une certaine manière de ne plus penser en termes de dièses qu'on ajoute à une gamme.

On donne une gamme  $S$  obtenue à partir de  $R$  en ajoutant  $n$  dièses. La question est : « y a-t-il une seule manière de disposer ces  $n$  dièses de façon à ce qu'on ait une gamme ? » En fait, la réponse est oui : il y a plusieurs manières de les disposer, mais ce sont toutes les mêmes. Nous montrerons un exemple de ça plus bas car si la lectrice n'a pas l'habitude de travailler avec par exemple 91 dièses à l'armure, elle ne voit sans doute pas bien comment obtenir la même gamme en disposant les dièses de plusieurs manières différentes.

Nous répondons facilement à la question : nous savons bien qu'une des notes de la gamme est la plus petite (dans une gamme, toutes les notes sont différentes). Soit  $a$ , cette note, qui est la fondamentale. Étant donné que nous savons que  $a \in S$ , et donc que  $a$  est une des notes de  $R$ , avec des dièses.  $S$  est la gamme de  $a$ . Mais une gamme construite sur une note de  $R$  avec des dièses est une gamme canonique ; donc  $S$  est une gamme canonique, avec  $n$  dièses. Et des gammes canoniques à  $n$  dièses, il n'y en a qu'une seule.

Il est donc sans équivoque de parler de « la gamme à  $n$  dièses » dès qu'on sait par rapport à quelle gamme, nous avons  $n$  dièses. Par exemple, la gamme de fa avec 3 dièses, c'est celle de do avec deux dièses.

Le point fort de cette démonstration (outre sa simplicité) par rapport au charabia de la première tentative est qu'elle n'utilise pas le second point de la définition A.5.

*Remarque B.6.* Cette preuve contient une très jolie faute : on sait que  $R$ , qui contient  $n$  dièses, peut s'écrire sous la forme d'une gamme canonique. Mais rien ne dit que cette gamme canonique

---

<sup>2</sup>voir l'hypothèse de récurrence.

contiendra ce même nombre  $n$  de dièses. C'est pour ça que tout ce fatras est flanqué en appendice : la démonstration principale est fausse.

### B.3 Exemple

Les personnes qui ont l'habitude de travailler avec un nombre plus petit ou égal à 12 dièses à la clef ne remarquent sans doute pas qu'il y a en fait moyen de placer les dièses de plusieurs manières pour obtenir la même gamme. L'exemple suivant d'une gamme à 91 dièses montre qu'on peut même inverser l'ordre des notes à coups de dièses. La gamme de zéro (zéro, on l'appelle souvent do, mais ici c'est tellement contre-intuitif par rapport au solfège classique qu'il vaut mieux pas penser en termes de noms de notes) est :

$$\begin{array}{cccccccc} \text{do} & \text{ré} & \text{mi} & \text{fa} & \text{sol} & \text{la} & \text{si} & \text{do} \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 2,5 & 3,5 & 4,5 & 5,5 & 6 \cdots \end{array} \quad (\text{B.13})$$

On peut obtenir la gamme de 6,5 en ajoutant 13 dièses sur chaque note : ainsi la plus petite note sera do+13 dièses=(do+octave) $\sharp$ =6,5 parce qu'on a dit que do=0, octave=6 et  $\sharp = \frac{1}{2}$ . En tout, ça fait 7 fois 13 dièses, c'est à dire 91.

Eh bien ! il y a une autre manière d'avoir la même gamme, avec 91 dièses aussi. Disons qu'on veut ajouter les dièses qu'il faut sur chaque note pour que le si joue le rôle du do, le la du ré, le sol du mi,... C'est à dire qu'on ajoute autant de dièses qu'il faut pour qu'on aie 6,5 (do+13 dièses) à partir de si et 7,5 (ré +13dièses) à partir du la,...

Ce que nous trouvons, c'est :

$$\begin{array}{cccccccccccc} & & 1 & & 1 & & \frac{1}{2} & & 1 & & 1 & & 1 \\ \text{si} & \rightarrow & \text{la} & \rightarrow & \text{sol} & \rightarrow & \text{fa} & \rightarrow & \text{mi} & \rightarrow & \text{ré} & \rightarrow & \text{do} \\ 2\sharp & & 6\sharp & & 10\sharp & & 13\sharp & & 16\sharp & & 20\sharp & & 24\sharp \\ = 6,5 & & = 7,5 & & = 8,5 & & = 9 & & = 10 & & = 11 & & = 12 \end{array}$$

En tout, c'est pas dur de voir qu'il y a bien 91 dièses, et c'est bien l'unique gamme qui commence à 6,5. C'est donc la même que celle de do+13 dièses. Fatalement : do+13 dièses = si+2 dièses !

Quand on entend l'expression « la gamme à  $n$  dièses », c'est donc pas univoque d'où sont les dièses dans la tête de la personne qui parle, mais les notes, elles, sont univoques car 6,5 c'est 6,5, et on s'en fout que l'on pense 6,5=0+6,5 ou bien 6,5=5,5+1. Même en ce qui concerne la musique : si $\sharp\sharp$ , c'est la même touche, le même doigté, le même tout que do13 $\sharp$ . Nous verons même que les gammes à dièses peuvent être vues comme des gammes ne contenant que des bémols.

### B.4 Les classes d'équivalences

Quand même, le but est de faire de la mathématique. Mais bon. Ce que nous essayons de faire, c'est de trouver un système pour formaliser les idées que nous trouvons en musique. Mais la définition des gammes que nous avons donnée fait clairement la différence entre la gamme de do et la gamme de do+octave. Et cela mène à devoir se casser la tête pour voir si il n'y a pas des contre-exemples à ce qu'on dit en cherchant des gammes débiles contenant des dizaines de dièses.

Nous aimerions donc trouver une nouvelle définition de la gamme, qui ferait en sorte que la gamme de 0 et la gamme de 6 soient les mêmes. En d'autres mots, si nous désignons par  $M(x)$  la gamme de  $x$  ( $M$  pour se souvenir que c'est majeur), nous aimerions pouvoir dire que  $M(0) = M(6) = M(12) = M(6n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Et bien entendu, il nous faudrait aussi que  $M(1) = M(7) = M(13) = \cdots$ , puis en général que

$$M(x) = M(x + 6n), \forall x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{Z}. \quad (\text{B.14})$$

C'est là que le concept de *classe d'équivalence* va entrer en jeu. Mathématiquement, ce sera un peu plus abstrait que des nombres, mais l'intuition musicale sera plus forte.

### Un premier exemple

Considérons l'ensemble  $\mathbb{N}$  des nombres entiers. Mettons que nous travaillons sur un problème pour lequel il est seulement important de savoir si un nombre est pair ou non. Nous voulons dire que 1 est le même que 3 et que 5 et ... tandis que 0,2,4,... sont identifiés entre eux. Nous disons donc que les nombres pairs sont *équivalents* entre eux, et que les nombres impairs sont équivalents entre eux. Un peu plus formellement, nous définissons une certaine relation sur  $\mathbb{N}$  que nous notons  $\sim$  et que nous appelons *relation d'équivalence* par

$$x \sim y \Leftrightarrow x - y \text{ est pair}. \quad (\text{B.15})$$

Clairement, si  $x$  et  $y$  sont tout les deux pairs ou bien tout les deux impairs, on a que  $x \sim y$ . Et de la même manière, on a que  $x \not\sim y$  si  $x$  et  $y$  sont l'un pair et l'autre impair. On peut alors définir les *classes d'équivalences* dans  $\mathbb{N}$  pour la relation  $\sim$  :

$$[a] = \{x \in \mathbb{N} \text{ tq } x \sim a\}. \quad (\text{B.16})$$

L'ensemble  $[a]$  ainsi défini pour  $a \in \mathbb{N}$  est appelé la *classe d'équivalence de  $a$* . Nous avons par exemple que

$$\begin{aligned} [0] &= [2] = [18] = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}, \\ [1] &= [3] = [759] = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

L'ensemble des classes d'équivalence dans  $\mathbb{Z}$  pour la relation  $\sim$  est noté  $\mathbb{Z}/\sim$ .

Une propriété directe dans ce cas-ci est que  $x \in [a] \Leftrightarrow [x] = [a]$ . C'est à dire que tous les nombres pairs ont comme classe d'équivalence l'ensemble des nombres pairs, et que tous les éléments de la classe d'un nombre pair est un nombre pair. Dans ce cas-ci, c'est évident. Dans le cas général –car il existe une définition plus précise– c'est un peu moins simple.

Un exemple classique de classe d'équivalence utilisé quotidiennement est celui de l'heure qui se compte avec une équivalence entre  $n$  et  $n + 24$ . En effet, 6 heures après 21 heures n'est pas 27 heures, mais 3 heures. C'est la dure vie des québécoises qui doivent calculer l'heure qu'il est en Europe.

### Les notes comme des classes d'équivalences

Bien que la définition générale d'une relation d'équivalence et des ensembles quotients soient des choses très intéressantes, la lectrice peut se rassurer, nous ne ferons que le stricte nécessaire pour exprimer rigoureusement du solfège conventionnel<sup>3</sup>.

**Définition B.7.** *Une note est une classe d'équivalence dans  $\mathbb{R}$  pour la relation*

$$x \sim y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{Z} \text{ tq } x - y = 6n. \quad (\text{B.18})$$

<sup>3</sup>Car il y a le solfège non conventionnel : celui des gammes où tout les demi-tons ne sont pas égaux ! Et là, je sens que ça doit être  $\mathfrak{X}$  parce que les quintes ne se bouclent pas dans la gamme.

Que signifie cette définition ? Pour la comprendre, voyons la classe de zéro, en utilisant la même définition que (B.16) :

$$\begin{aligned}
 [0] &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x \sim 0\} \\
 &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tq } x = 6n\} \\
 &= \{0, 6, 12, 18 \cdots, -6, -12, -18, \cdots\}.
 \end{aligned}
 \tag{B.19}$$

Bref, quand on a dans l'idée de prendre do comme référence avec do=0, la classe [do], c'est l'ensemble des notes (selon l'ancienne définition) qui sont des do dans le sens solfégique du terme.

**Définition B.8.** *Une gamme est maintenant le quotient des anciennes gammes par la relation  $\sim$ . Ça c'est la définition pour les vrais. Pour dire ça plus simplement, une gamme est un ensemble de notes séparées par les bons intervalles.*

Voyons en quoi cette définition arrange pas mal des trucs. Le principal avantage d'une gamme ainsi définie c'est qu'elle est automatiquement cyclique, sans qu'on aie besoin d'aller chercher des notes très hautes... Mais encore ? Qu'est-ce que ça veut dire, ça :S ?

Il faut définir ce qu'est un intervalle. Avant c'était facile : une note était un nombre, et un intervalle était naturellement la différence entre les deux nombres. Maintenant, il faut bien voir qu'une note est un *ensemble* de nombres. Si nous considérons encore do comme la référence do=0, nous avons la relation (B.19), tandis que si nous prenons naturellement ré=1, nous avons

$$[\text{ré}] = [1] = \{1, 7, 13, 19, \cdots, -5, -11, \cdots\}. \tag{B.20}$$

Comment définir ce que nous avons envie de noter  $[a] - [b]$ , mais que nous n'allons pas noter ainsi, car cela induirait en erreur. Allons-y pour la définition barbare :

**Définition B.9.** *L'intervalle entre les notes  $[a]$  et  $[b]$  est le nombre*

$$d([a], [b]) = \min_{x \in [a], y \in [b]} |x - y|. \tag{B.21}$$

Que veut dire cette définition ? Pour trouver l'intervalle entre  $[a]$  et  $[b]$ , nous devons prendre le minimum de la distance entre tous les nombres compris dans  $[a]$  et ceux dans  $[b]$ . Par exemple, si do = 0 et ré = 1, l'intervalle [do]-[ré] se calcule ainsi : commençons par écrire explicitement [do] et [ré] :

$$\begin{aligned}
 [\text{do}] &= \{\cdots, -12, -6, 0, 6, 12 \cdots\}, \\
 [\text{ré}] &= \{\cdots, -11, -5, 1, 7, 13 \cdots\}.
 \end{aligned}
 \tag{B.22}$$

Pour calculer l'intervalle, il faut trouver quel est le plus petit des  $|x - y|$  quand  $x$  est choisit dans [do] et  $y$  dans [ré]. En prenant par exemple  $x = 0$  et  $y = 1$ , on obtient  $|0-1|=1$ . Ce 1, on peut aussi l'obtenir en prenant  $x = 6$  et  $y = 7$ . L'important est qu'on ne peut pas trouver de  $x$  et  $y$  ayant de différence plus petite que 1 (attention à la valeur absolue).

Faisons quand même remarquer que  $d([a], [b]) = d([b], [a])$ .

Maintenant, nous pouvons comprendre l'avantage de la définition B.8 par rapport à celle A.1. Une gamme est un ensemble de notes séparés par les bons intervalles. C'est à dire que

**Définition B.10.**  $\{[a], [b], [c], [d], [e], [f], [g]\}$  est une gamme si

$$\begin{aligned}
d([a], [b]) &= 1, \\
d([c], [b]) &= 1, \\
d([d], [c]) &= \frac{1}{2}, \\
d([e], [d]) &= 1, \\
d([f], [e]) &= 1, \\
d([a], [g]) &= \frac{1}{2}.
\end{aligned}
\tag{B.23}$$

Cette gamme est naturellement appelée gamme de  $[a]$ , et non gamme de  $a$ ; la distinction a son importance!

L'immense avantage du formalisme des classes d'équivalences est le fait qu'à présent, une gamme est un ensemble *fini*, et possède toujours des éléments entre 0 et 6. En celà, nous entendons que dans toutes les gammes, chaque note est une classe d'équivalence (définition de note), et que bien entendu, ces classes d'équivalences contiennent toujours un nombre entre 0 et 6. Autre manière de le dire : pour faire une gamme quelconque, il suffit de prendre 7 nombres entre 0 et 6 qui vérifient les bons intervalles, et d'ensuite en prendre les classes d'équivalences.

Il existe un autre avantage de la définition des gammes par les classes d'équivalences. Si l'on considère l'ensemble

$$\{\text{do} + 12\sharp, \text{ré}, \text{mi}, \text{fa}, \text{sol}, \text{la}, \text{si}, \dots\},$$

ce n'est pas une gamme pour l'ancienne définition, étant donné que le plus petit élément de cet ensemble est le ré, et que dans l'ordre, on a : ré, mi, fa, sol, la, si, do + 12 $\sharp$ , ré<sub>2</sub>, ... et que donc, l'intervalle entre le deuxième et troisième degré est mauvais : il vaut  $\frac{1}{2}$  et non 1. Pourtant, musicalement parlant, on a bien envie de dire que c'est quand même une gamme parce qu'en musique, la gamme s'étend dans les deux sens; et que quand on joue un do, on s'en fout pas mal que le compositeur ait en tête le do qu'on joue ou bien le précédent avec 12 dièses.

Dans la nouvelle définition des gammes, le problème ne se pose plus parce que la gamme qui ressemblerait le plus à celle-là, c'est

$$\{[\text{do} + 12\sharp], [\text{ré}], [\text{mi}], [\text{fa}], [\text{sol}], [\text{la}], [\text{si}], \}$$

où l'on ne fait pas la distinction entre  $[+12\sharp] = [\text{do} + 6] = [\text{do}]$ .

Donc, le fait de vouloir mettre 12 dièses sur une seule note, qui est censé ne rien changer du tout à la musique est mal géré par l'ancienne définition, mais parfaitement sans conséquences dans la nouvelle.

Et tant qu'on est dans les avantages de la nouvelle définition, nous pouvons encore faire remarquer que la subtilité avec la queue de suite dans la définition A.5 n'a à présent plus aucun sens. Ce problème est automatiquement réglé.

## B.5 Une petite démonstration

Maintenant que ce nouveau formalisme est développé, les démonstrations se réécrivent facilement. Démontrons, juste pour nous amuser, un théorème facile que l'on a déjà invoqué à plusieurs reprises.

**Théorème B.11.** *Le cycle des quintes est générateur et est cyclique.*

Avant de le démontrer, il faut voir ce qu'on entend par  $[a]$ +quinte. Faut remarquer en quoi il faut une définition. En effet, la dernière définition que nous avons du mot « quinte » était « quinte=3,5. » Donc quinte est un nombre, alors que  $[a]$  est un ensemble de nombres. Il n'est *a priori* pas évident de les additionner. Ce blabla étant, nous définissons logiquement :

**Définition B.12.**

$$[a] + \text{quinte} = [a + \text{quinte}]. \quad (\text{B.24})$$

Par exemple,  $[\text{do}] + \text{quinte} = [0+3,5] = [3,5] = [\text{sol}]$ . Mais la force des classes d'équivalences est dans l'exemple suivant :  $[\text{la}] + \text{quinte} = [4,5+3,5] = [8] = [2] = [\text{mi}]$ . Le point fort est que  $[8] = [2]$  parce que  $8-2=6$ . Bref, le formalisme des classes d'équivalences permet de faire des passages de l'octave sans problèmes : la gamme est *vraiment* cyclique.

*Démonstration du théorème B.11 .* Ce n'est pas très difficile. Il s'agit de voir sur quelles notes on passe en partant de d'une certaine note  $[a]$ , et en faisant plusieurs fois +quinte. En partant de  $[\text{do}]$ , le résultat est connu ; il suffit de savoir compter jusqu'à cinq douze fois sans se tromper :  $[\text{do}]$ ,  $[\text{sol}]$ ,  $[\text{ré}]$ ,  $[\text{la}]$ ,  $[\text{mi}]$ ,  $[\text{si}]$ ,  $[\text{fa}\sharp]$ ,  $[\text{do}\sharp]$ ,  $[\text{sol}\sharp]$ ,  $[\text{ré}\sharp]$ ,  $[\text{la}\sharp]$ ,  $[\text{mi}\sharp] = [\text{fa}]$ ,  $[\text{do}]$  et on est bouclé, et étant passé une fois par chaque note de la gamme.

Comment obtenir le même résultat, en partant d'une gamme quelconque  $[a]$ , et en utilisant vraiment les définitions ? Ben on le fait. On a dans l'ordre :

$$[a] \quad (\text{B.25a})$$

$$[a + 3, 5] \quad (\text{B.25b})$$

$$[a + 7] = [a + 1] \quad (\text{B.25c})$$

$$[a + 4, 5] \quad (\text{B.25d})$$

$$[a + 8] = [a + 2] \quad (\text{B.25e})$$

$$[a + 5, 5] \quad (\text{B.25f})$$

$$[a + 9] = [a + 3] \quad (\text{B.25g})$$

$$[a + 6, 5] = [a + 0, 5] \quad (\text{B.25h})$$

$$[a + 4] \quad (\text{B.25i})$$

$$[a + 1, 5], \quad (\text{B.25j})$$

$$[a + 5] \quad (\text{B.25k})$$

$$[a + 2, 5] \quad (\text{B.25l})$$

$$[a + 6] = [a]. \quad (\text{B.25m})$$

et on est bouclé en étant passé par

$$[a], [a+0,5], [a+1], [a+1,5], [a+2], [a+2,5], [a+3], [a+3,5], [a+4], [a+4,5], [a+5], [a+5,5];$$

c'est à dire par tout les degrés de ce que nous pourrions appeler la « gamme chromatique de  $[a]$ . »  $\square$

## B.6 Les gammes canoniques

Nous appellons  $M(a)$ , la gamme de  $[a]$ . Nous avons donc que

$$\begin{aligned}
M(a) &= \{[a], [a+1], [a+2], [a+2, 5], [a+3, 5], [a+4, 5], [a+5, 5]\} \\
&= \{[a+6], [a+7] \cdots [a+11, 5]\} \\
&= M(a+6),
\end{aligned} \tag{B.26}$$

ce qui fait que nous avons donc comme nous le voulions que  $M(a) = M(a+6)$ .

On reprends le lemme central qui permet de définir les gammes canoniques :

**Lemme B.13.** *Il y a une seule façon d'ajouter un dièse à une gamme de telle manière à ce que le résultat soit encore une gamme. Et cette manière est de mettre le dièse sur la quarte, en obtenant la gamme de la quinte.*

*Démonstration.* Il suffit de regarder (B.26) et de regarder où ça marche et où ça ne marche pas. Comme dans la démonstration B.1. Voyons simplement que ça marche avec un dièse sur  $[a+2, 5]$ . On se retrouve avec les notes

$$\{[a], [a+1], [a+2], [a+3], [a+3, 5], [a+4, 5], [a+5, 5]\}.$$

Afin de voir que c'est bien la gamme de  $[a+3, 5]$ , il faut juste voir que ça vérifie bien les conditions (B.23). Nous ne faisons que les passages difficiles :  $d([a+4, 5], [a+3, 5]) = 1$  ; pour voir ce que vaut  $d([a], [a+5, 5])$ , il faut un peu réfléchir (ce n'est pas 5,5!) : il faut trouver les nombres de  $[a]$  qui sont les plus rapprochés de nombres de  $[a+5, 5]$ . Dans  $[a]$ , on a par exemple le nombre  $a+6$ , qui n'est qu'à  $\frac{1}{2}$  de  $a+5, 5$  qui est dans  $[a+5, 5]$ . Bref, l'intervalle entre les deux est bien de  $\frac{1}{2}$  comme il le faut. Les autres intervalles se calculent avec le même genre de raisonnement.  $\square$

Ce théorème donne une méthode pour construire des gammes systématiquement à partir d'une gamme donnée. Les gammes obtenues par cette méthode à partir d'une gamme  $R$  sont appelées les *gammes canoniques de  $R$* , et l'ensemble de ces gammes est noté  $\mathcal{C}(R)$ .

Le prochain pas est comme d'habitude de montrer que toutes les gammes qui s'obtiennent par ajout de dièses à une gamme donnée sont des gammes canoniques, donnant ainsi un sens précis à l'expression « la gamme à  $n$  dièses ». Pour ce faire, il faut encore dire ce qu'on entend par « ajouter un dièse sur une note. » Mais avec le coup des classes d'équivalences, c'est facile. Le symbole  $[a]\sharp$  désigne bien entendu la note  $[a + \frac{1}{2}]$ .

**Théorème B.14.** *Soit  $R$ , une gamme et  $S$ , une gamme qu'on obtient à partir de  $R$  en ajoutant  $n$  dièses. Alors,  $S$  est une gamme canonique, et est donc la seule gamme à  $n$  dièses possible à construire à partir de  $R$ .*

*Démonstration.* Il s'agit de reprendre l'argument donné à la page 21. L'ensemble de notes  $S$  étant une gamme, elle possède une fondamentale qui doit être une des douze notes qu'on peut obtenir en ajoutant des dièses à  $R$ . Donc,  $S$  est une gamme canonique, vu que toute gamme partant d'une des douze notes est canonique parce que il n'existe qu'une seule gamme partant d'une note donnée, et qu'il existe une gamme canonique partant de toute note donnée. Bref, toutes les gammes sont canoniques.

D'autre part, un nombre de dièse étant donné, il n'existe qu'une seule gamme canonique qui en possède autant. C'est logique, par la construction même des gammes canoniques : on définit celle à un dièse à partir de celle à zéro, puis celle à deux à partir de celle à un, etc... chaque fois en démontrant (cf le lemme B.13) que la construction est unique.  $\square$

*Remarque B.15.* Évidemment cette démonstration souffre de la même faute que celle de la page 21.

Pour la dixième fois, nous pouvons à présent parler de « la gamme à  $n$  dièses » sans ambiguïtés (dès que l'on sait de quelle gamme on part) ; mais cette fois dans un formalisme qui, je l'espère, est définitif.

## B.7 Le lemme des dièses

L'objectif de l'affaire est de démontrer une bonne fois pour toute que « le dernier dièse est sur la sensible. » Après tout les efforts déployés, ce serait bien le diable ce ne soit pas facile à démontrer ! Et en effet, ça ne l'est pas. D'abord, disons ce qu'on entend par « le *dernier* dièse. » Si une gamme a  $n$  dièses, on la construit en appliquant  $n$  fois le lemme B.13, et donc en ajoutant  $n$  dièses. Naturellement, ce procédé donne un ordre aux dièses. Le dernier, c'est le dernier, c'est clair. Quand on voit le procédé de construction, c'est clair que le dernier dièse est toujours sur la sensible. Mais bon. Rien que pour s'ammuser, on va en donner une démonstration par récurrence. C'est que la récurrence, c'est important à comprendre, quand on veut se lancer dans une carrière mathématique<sup>4</sup>.

**Lemme B.16** (Lemme des dièses). *Soit  $S$ , la gamme canonique à  $n$  dièses obtenue à partir d'une gamme  $R$ . Alors, le dernier dièse de  $S$  est sur sa sensible.*

*Démonstration.* Histoire de parler comme tout le monde, on va appeler les notes de  $R$  par les noms [do], [ré], . . . , [si]. Ce faisant, on sous-entend que [do] est la tonique de  $R$ , et pas spécialement [0].

**L'amorce** On commence par démontrer que la proposition est vraie pour  $n = 1$ . Ça c'est pas dur. La construction de la gamme à 1 dièse se fait en ajoutant un dièse à la quarte ([fa]), et on obtient la gamme de la quinte ([sol]). La gamme obtenue est donc

$$\{[\text{sol}], [\text{la}], [\text{si}], [\text{do}], [\text{ré}], [\text{mi}], [\text{fa}\sharp]\}.$$

Là, c'est clair que le dièse est sur la sensible.

**La récurrence** Prenons un certain  $n \in \mathbb{N}$ , et supposons que d'une manière ou d'une autre, nous avons montré que le lemme était vrai pour  $n$ . Alors nous allons montrer que c'est vrai pour  $n + 1$ .

Soit donc  $T$ , la gamme à  $n$  dièses par rapport à  $R$ , dont nous savons que le dernier est sur la sensible. Nous considérons  $U$ , la gamme obtenue à partir de  $S$  par ajout d'un dièse, c'est à dire que  $U$  possède  $n + 1$  dièses par rapport à  $R$ . Il faut montrer que  $U$  a son dernier dièse (celui qu'on a ajouté à  $T$ ) juste sur sa sensible. Comme je l'ai déjà dit, le point fort est qu'on s'en fout pas mal des  $n$  premiers dièses. Tout ce qui importe c'est qu'on en ajoute un à une certaine gamme. On ajoute un dièse sur la quarte de la gamme  $T$ , et on obtient la gamme  $U$  qui est la gamme de la quinte de  $T$ . Autre manière de le dire, si  $T$  est la gamme de  $[a]$ ,  $U$  est la gamme de  $[a + \text{quinte}]$ , avec un dernier dièse sur  $[a + \text{quarte}]$ . Et donc, c'est démontré : la gamme  $U$  a un dièse sur sa sensible :  $[a + \text{quarte}]$  est bien un demi en-dessous de  $[a + \text{quinte}]$ , quel que soit  $a$ .

**Explications** Le véritable mathématicien a compris que c'est fini. Mais bon... Pour savoir si la propriété est vraie pour la gamme à deux dièses, on se souvient qu'elle est vraie pour un. Mais la récurrence dit que si c'est vrai pour un, c'est vrai pour deux. Mais comme c'est vrai pour deux, c'est vrai pour trois (à nouveau la récurrence), etc...

□

---

<sup>4</sup>Hummm...

Avant de continuer, nous pouvons remarquer une chose curieuse de prime abord : nous avons défini une gamme canonique comme étant une gamme construite à partir d’une certaine gamme  $R$  par ajout de dièses *uniquement*, et nous avons démontré que toutes les gammes étaient canoniques : toutes les gammes ont une fondamentale, et les gammes canoniques à dièses passent par toutes les fondamentales (le cycle des quinte est générateur). Où sont passées les gammes à bémol ? En fait, il faut remarquer que nous avons *douze* gammes à dièses différentes. Certaines doivent alors être équivalentes à des gammes à dièses. Il n’est donc en vérité pas juste de dire que par exemple la gamme de  $\text{sib}$  est une gamme à deux bémols : il doit y avoir moyen de l’avoir avec des dièses aussi. En effet,  $\text{sib}=\text{la}\sharp$ , mais la gamme de  $\text{la}\sharp$ , on l’a obtenue. Dans (B.25) avec  $a = 0$  (on prends  $\text{do}=0$  comme gamme de référence), on cherche le  $\text{la}\sharp$ . Si  $\text{do}=0$ ,  $\text{la}\sharp=10$ . La gamme de  $\text{la}\sharp$  est donc la gamme de  $[10]$ , c’est à dire la gamme de  $[4]$ . Elle arrive en neuvième position, et a donc 8 dièses à la clef (la première est  $[0]=[\text{do}]$  qui n’a pas de dièses et on en ajoute un à chaque fois).

Nous pouvons donc tout aussi bien désigner la gamme de  $\text{sib}$  en disant « la gamme à deux bémols » qu’en disant « la gamme à 8 dièses. » Ce sont deux représentations de la même gamme.

Il m’a donc tout l’air qu’on peut faire de la musique sans bémols ; il suffit de remplacer par des pelletées de dièses.

Il faudra généraliser et formaliser ça ; bien dire ce qu’est un bémol, construire les gammes à bémol et tout et tout.

## C Étude des bémols dans les gammes majeures

### C.1 Construction des gammes à bémols et propriétés immédiates

Comme avec les dièses, il s’agit de démontrer qu’il n’y a qu’une seule manière d’ajouter un bémol à une gamme en conservant une gamme. C’est pas dur de voir que la seule possibilité est de mettre un bémol sur la sensible et d’obtenir la gamme de la quinte précédente. C’est à dire que de la gamme de  $[a]$ , on met un bémol sur  $[a - \frac{1}{2}]$ , et on obtient la gamme de  $[a - \text{quinte}]$ .

Par cette méthode, on construit des gammes (qui s’enchainent par quintes descendantes) contenant de plus en plus de bémols. On appelle ces gammes des *gammes canoniques à bémols*

Lorsqu’on a une gamme contenant rien que des dièses, et que l’on désire lui ajouter un bémol, il faut l’ajouter sur la sensible et puis on trouve la gamme d’une quinte plus bas. Par conséquent, cela revient à enlever le dernier dièse (qui est, nous l’avons démontré, sur la sensible), et à retrouver la gamme qui contient un dièse en moins.

Dit plus laconiquement, la gamme à un bémol construite sur la gamme à  $n$  dièses est la gamme à  $n - 1$  dièses.

### C.2 Un paradoxe apparent

En avançant par quintes descendantes, on passe par tout les degrés de la gamme chromatique, dans le sens exactement inverse des gammes ascendantes, donc l’ordre des gammes à bémols est juste le contraire des gammes dièses, et toutes les gammes sont des gammes canoniques à bémols. Une remarque sur le fait que les gammes à bémols s’enchainent dans le sens inverse des gammes à dièses. Quand on regarde les manuels de solfège, ça n’a pas tellement l’air d’être le cas. En effet, les gammes à dièses sont

sol, ré, la, mi, si, fa $\sharp$ , do $\sharp$ ,

alors que celles à bémol sont

fa, sib, mi♭, lab, ré♭, sol♭, do♭;

*a priori*, rien à voir. On n'a même pas que la dernière à bémol (do♭) est la même que la première à dièse (sol), parce que do♭=si qui n'est pas du tout sol.

Comment alors peut-on affirmer que l'ordre des gammes à dièses est l'inverse de celui des gammes à bémol ? Et pourtant, quand on réfléchit à la manière dont c'est construit, c'est logique. En fait, la solution est que dans les cours de solfège, on ne donne jamais que les sept premières gammes à dièses et à bémol, alors qu'il y en a douze. Donc, la dernière gamme à dièse n'est pas do♯, mais bien (cf (B.25)) la gamme de [2,5] qui est fa. Et bingo ! Fa est bien la première gamme à bémol. La gamme à onze dièses (faM) est la même que celle à un bémol.

Conclusion : toute gamme peut être vue soit comme une gamme à bémol soit comme une gamme à dièse, au choix ; les deux descriptions sont mathématiquement équivalentes. Mais c'est clair que visuellement, sur une partition, la gamme de fa, vue comme celle à un bémol est plus simple à voir que vue comme celle à onze dièses. Pourtant, c'est la même chose à jouer.

### C.3 Le lemme des bémols

Il s'agit de démontrer que dans la gamme à  $n$  bémols, l'avant-dernier tombe sur la tonique. Exemple : la gamme à deux bémols, sib, a son avant-dernier bémol sur le si.

**Lemme C.1** (Lemme des bémols). *Soit  $R$ , la gamme à bémols. L'avant-dernier bémol est sur la tonique.*

*Démonstration.* Nous pourrions aussi le démontrer par récurrence, comme le lemme des dièses, mais pour varier les plaisirs, nous en donnons une démonstration plus directe et calculatoire. Finalement, ça revient un peu au même.

Mettons que  $R$  possède  $n + 1$  bémols. Il s'agit de voir où est le  $n^{\text{ème}}$ . Pour ce faire, on va d'abord regarder où est le dernier, à savoir le bémol numéro  $n + 1$ . Pour créer  $R$ , on est parti d'une gamme à  $n$  bémols (appelons-la la gamme de  $[a]$ ), et on a mis un bémol sur  $[a - \frac{1}{2}]$  pour trouver la gamme de  $[a - \text{quinte}] = [a - 3, 5]$ . On se souvient que  $[a - \frac{1}{2}] = [a - \frac{1}{2} + 6] = [a + 5, 5]$  et que  $[a - 3, 5] = [a - 3, 5 + 6] = [a + 2, 5]$ . La gamme  $R$  est donc la gamme de  $[a + 2, 5]$  avec comme dernier bémol  $[a + 5, 5]$ . Étant donné que  $R$  est n'importe quelle gamme, on a toujours que le dernier bémol d'une gamme tombe 3 plus loin que la tonique. Mais comme les bémols s'ajoutent par quintes descendantes, le bémol précédent est une quinte plus loin que  $[a + 5, 5]$ , c'est à dire est sur  $[a + 5, 5 + 3, 5] = [a + 9] = [a + 3]$ . La gamme  $R$  possède donc comme avant-dernier bémol le bémol sur  $[a + 3]$ . C'est à dire qu'une des notes de  $R$  est  $[a + 3]♭ = [a + 2, 5]$ . Mais on a justement dit que  $R$  était précisément la gamme de  $[a + 2, 5]$ . Donc, la note qui tient l'avant dernier bémol est bien la tonique.

Dans le courant de la démonstration, il faut faire attention à ne pas confondre la gamme  $R$  et la gamme de  $[a]$  :  $R$  est celle à  $n + 1$  bémols, tandis que la gamme de  $[a]$  est celle à  $n$  bémols, à partir de laquelle on construit  $R$  par ajout d'un bémol.

□

## D GNU Free Documentation License

Version 1.2, November 2002  
Copyright ©2000,2001,2002 Free Software Foundation, Inc.

51 Franklin St, Fifth Floor, Boston, MA 02110-1301 USA

Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies of this license document, but changing it is not allowed.

## Preamble

The purpose of this License is to make a manual, textbook, or other functional and useful document "free" in the sense of freedom : to assure everyone the effective freedom to copy and redistribute it, with or without modifying it, either commercially or noncommercially. Secondly, this License preserves for the author and publisher a way to get credit for their work, while not being considered responsible for modifications made by others.

This License is a kind of "copyleft", which means that derivative works of the document must themselves be free in the same sense. It complements the GNU General Public License, which is a copyleft license designed for free software.

We have designed this License in order to use it for manuals for free software, because free software needs free documentation : a free program should come with manuals providing the same freedoms that the software does. But this License is not limited to software manuals ; it can be used for any textual work, regardless of subject matter or whether it is published as a printed book. We recommend this License principally for works whose purpose is instruction or reference.

## 1. APPLICABILITY AND DEFINITIONS

This License applies to any manual or other work, in any medium, that contains a notice placed by the copyright holder saying it can be distributed under the terms of this License. Such a notice grants a world-wide, royalty-free license, unlimited in duration, to use that work under the conditions stated herein. The "**Document**", below, refers to any such manual or work. Any member of the public is a licensee, and is addressed as "**you**". You accept the license if you copy, modify or distribute the work in a way requiring permission under copyright law.

A "**Modified Version**" of the Document means any work containing the Document or a portion of it, either copied verbatim, or with modifications and/or translated into another language.

A "**Secondary Section**" is a named appendix or a front-matter section of the Document that deals exclusively with the relationship of the publishers or authors of the Document to the Document's overall subject (or to related matters) and contains nothing that could fall directly within that overall subject. (Thus, if the Document is in part a textbook of mathematics, a Secondary Section may not explain any mathematics.) The relationship could be a matter of historical connection with the subject or with related matters, or of legal, commercial, philosophical, ethical or political position regarding them.

The "**Invariant Sections**" are certain Secondary Sections whose titles are designated, as being those of Invariant Sections, in the notice that says that the Document is released under this License. If a section does not fit the above definition of Secondary then it is not allowed to be designated as Invariant. The Document may contain zero Invariant Sections. If the Document does not identify any Invariant Sections then there are none.

The "**Cover Texts**" are certain short passages of text that are listed, as Front-Cover Texts or Back-Cover Texts, in the notice that says that the Document is released under this License. A Front-Cover Text may be at most 5 words, and a Back-Cover Text may be at most 25 words.

A "**Transparent**" copy of the Document means a machine-readable copy, represented in a format whose specification is available to the general public, that is suitable for revising the

document straightforwardly with generic text editors or (for images composed of pixels) generic paint programs or (for drawings) some widely available drawing editor, and that is suitable for input to text formatters or for automatic translation to a variety of formats suitable for input to text formatters. A copy made in an otherwise Transparent file format whose markup, or absence of markup, has been arranged to thwart or discourage subsequent modification by readers is not Transparent. An image format is not Transparent if used for any substantial amount of text. A copy that is not "Transparent" is called "**Opaque**".

Examples of suitable formats for Transparent copies include plain ASCII without markup, Texinfo input format, LaTeX input format, SGML or XML using a publicly available DTD, and standard-conforming simple HTML, PostScript or PDF designed for human modification. Examples of transparent image formats include PNG, XCF and JPG. Opaque formats include proprietary formats that can be read and edited only by proprietary word processors, SGML or XML for which the DTD and/or processing tools are not generally available, and the machine-generated HTML, PostScript or PDF produced by some word processors for output purposes only.

The "**Title Page**" means, for a printed book, the title page itself, plus such following pages as are needed to hold, legibly, the material this License requires to appear in the title page. For works in formats which do not have any title page as such, "Title Page" means the text near the most prominent appearance of the work's title, preceding the beginning of the body of the text.

A section "**Entitled XYZ**" means a named subunit of the Document whose title either is precisely XYZ or contains XYZ in parentheses following text that translates XYZ in another language. (Here XYZ stands for a specific section name mentioned below, such as "**Acknowledgements**", "**Dedications**", "**Endorsements**", or "**History**".) To "**Preserve the Title**" of such a section when you modify the Document means that it remains a section "Entitled XYZ" according to this definition.

The Document may include Warranty Disclaimers next to the notice which states that this License applies to the Document. These Warranty Disclaimers are considered to be included by reference in this License, but only as regards disclaiming warranties : any other implication that these Warranty Disclaimers may have is void and has no effect on the meaning of this License.

## 2. VERBATIM COPYING

You may copy and distribute the Document in any medium, either commercially or non-commercially, provided that this License, the copyright notices, and the license notice saying this License applies to the Document are reproduced in all copies, and that you add no other conditions whatsoever to those of this License. You may not use technical measures to obstruct or control the reading or further copying of the copies you make or distribute. However, you may accept compensation in exchange for copies. If you distribute a large enough number of copies you must also follow the conditions in section 3.

You may also lend copies, under the same conditions stated above, and you may publicly display copies.

## 3. COPYING IN QUANTITY

If you publish printed copies (or copies in media that commonly have printed covers) of the Document, numbering more than 100, and the Document's license notice requires Cover Texts, you must enclose the copies in covers that carry, clearly and legibly, all these Cover Texts : Front-Cover Texts on the front cover, and Back-Cover Texts on the back cover. Both covers must also clearly and legibly identify you as the publisher of these copies. The front cover must present the full title with all words of the title equally prominent and visible. You may add other material

on the covers in addition. Copying with changes limited to the covers, as long as they preserve the title of the Document and satisfy these conditions, can be treated as verbatim copying in other respects.

If the required texts for either cover are too voluminous to fit legibly, you should put the first ones listed (as many as fit reasonably) on the actual cover, and continue the rest onto adjacent pages.

If you publish or distribute Opaque copies of the Document numbering more than 100, you must either include a machine-readable Transparent copy along with each Opaque copy, or state in or with each Opaque copy a computer-network location from which the general network-using public has access to download using public-standard network protocols a complete Transparent copy of the Document, free of added material. If you use the latter option, you must take reasonably prudent steps, when you begin distribution of Opaque copies in quantity, to ensure that this Transparent copy will remain thus accessible at the stated location until at least one year after the last time you distribute an Opaque copy (directly or through your agents or retailers) of that edition to the public.

It is requested, but not required, that you contact the authors of the Document well before redistributing any large number of copies, to give them a chance to provide you with an updated version of the Document.

## 4. MODIFICATIONS

You may copy and distribute a Modified Version of the Document under the conditions of sections 2 and 3 above, provided that you release the Modified Version under precisely this License, with the Modified Version filling the role of the Document, thus licensing distribution and modification of the Modified Version to whoever possesses a copy of it. In addition, you must do these things in the Modified Version :

- A. Use in the Title Page (and on the covers, if any) a title distinct from that of the Document, and from those of previous versions (which should, if there were any, be listed in the History section of the Document). You may use the same title as a previous version if the original publisher of that version gives permission.
- B. List on the Title Page, as authors, one or more persons or entities responsible for authorship of the modifications in the Modified Version, together with at least five of the principal authors of the Document (all of its principal authors, if it has fewer than five), unless they release you from this requirement.
- C. State on the Title page the name of the publisher of the Modified Version, as the publisher.
- D. Preserve all the copyright notices of the Document.
- E. Add an appropriate copyright notice for your modifications adjacent to the other copyright notices.
- F. Include, immediately after the copyright notices, a license notice giving the public permission to use the Modified Version under the terms of this License, in the form shown in the Addendum below.
- G. Preserve in that license notice the full lists of Invariant Sections and required Cover Texts given in the Document's license notice.
- H. Include an unaltered copy of this License.
- I. Preserve the section Entitled "History", Preserve its Title, and add to it an item stating at least the title, year, new authors, and publisher of the Modified Version as given on the Title Page. If there is no section Entitled "History" in the Document, create one stating the title, year, authors, and publisher of the Document as given on its Title Page, then add an item describing the Modified Version as stated in the previous sentence.

- J. Preserve the network location, if any, given in the Document for public access to a Transparent copy of the Document, and likewise the network locations given in the Document for previous versions it was based on. These may be placed in the "History" section. You may omit a network location for a work that was published at least four years before the Document itself, or if the original publisher of the version it refers to gives permission.
- K. For any section Entitled "Acknowledgements" or "Dedications", Preserve the Title of the section, and preserve in the section all the substance and tone of each of the contributor acknowledgements and/or dedications given therein.
- L. Preserve all the Invariant Sections of the Document, unaltered in their text and in their titles. Section numbers or the equivalent are not considered part of the section titles.
- M. Delete any section Entitled "Endorsements". Such a section may not be included in the Modified Version.
- N. Do not retitle any existing section to be Entitled "Endorsements" or to conflict in title with any Invariant Section.
- O. Preserve any Warranty Disclaimers.

If the Modified Version includes new front-matter sections or appendices that qualify as Secondary Sections and contain no material copied from the Document, you may at your option designate some or all of these sections as invariant. To do this, add their titles to the list of Invariant Sections in the Modified Version's license notice. These titles must be distinct from any other section titles.

You may add a section Entitled "Endorsements", provided it contains nothing but endorsements of your Modified Version by various parties—for example, statements of peer review or that the text has been approved by an organization as the authoritative definition of a standard.

You may add a passage of up to five words as a Front-Cover Text, and a passage of up to 25 words as a Back-Cover Text, to the end of the list of Cover Texts in the Modified Version. Only one passage of Front-Cover Text and one of Back-Cover Text may be added by (or through arrangements made by) any one entity. If the Document already includes a cover text for the same cover, previously added by you or by arrangement made by the same entity you are acting on behalf of, you may not add another; but you may replace the old one, on explicit permission from the previous publisher that added the old one.

The author(s) and publisher(s) of the Document do not by this License give permission to use their names for publicity for or to assert or imply endorsement of any Modified Version.

## 5. COMBINING DOCUMENTS

You may combine the Document with other documents released under this License, under the terms defined in section 4 above for modified versions, provided that you include in the combination all of the Invariant Sections of all of the original documents, unmodified, and list them all as Invariant Sections of your combined work in its license notice, and that you preserve all their Warranty Disclaimers.

The combined work need only contain one copy of this License, and multiple identical Invariant Sections may be replaced with a single copy. If there are multiple Invariant Sections with the same name but different contents, make the title of each such section unique by adding at the end of it, in parentheses, the name of the original author or publisher of that section if known, or else a unique number. Make the same adjustment to the section titles in the list of Invariant Sections in the license notice of the combined work.

In the combination, you must combine any sections Entitled "History" in the various original documents, forming one section Entitled "History"; likewise combine any sections Entitled "Acknowledgements", and any sections Entitled "Dedications". You must delete all sections Entitled "Endorsements".

## 6. COLLECTIONS OF DOCUMENTS

You may make a collection consisting of the Document and other documents released under this License, and replace the individual copies of this License in the various documents with a single copy that is included in the collection, provided that you follow the rules of this License for verbatim copying of each of the documents in all other respects.

You may extract a single document from such a collection, and distribute it individually under this License, provided you insert a copy of this License into the extracted document, and follow this License in all other respects regarding verbatim copying of that document.

## 7. AGGREGATION WITH INDEPENDENT WORKS

A compilation of the Document or its derivatives with other separate and independent documents or works, in or on a volume of a storage or distribution medium, is called an "aggregate" if the copyright resulting from the compilation is not used to limit the legal rights of the compilation's users beyond what the individual works permit. When the Document is included in an aggregate, this License does not apply to the other works in the aggregate which are not themselves derivative works of the Document.

If the Cover Text requirement of section 3 is applicable to these copies of the Document, then if the Document is less than one half of the entire aggregate, the Document's Cover Texts may be placed on covers that bracket the Document within the aggregate, or the electronic equivalent of covers if the Document is in electronic form. Otherwise they must appear on printed covers that bracket the whole aggregate.

## 8. TRANSLATION

Translation is considered a kind of modification, so you may distribute translations of the Document under the terms of section 4. Replacing Invariant Sections with translations requires special permission from their copyright holders, but you may include translations of some or all Invariant Sections in addition to the original versions of these Invariant Sections. You may include a translation of this License, and all the license notices in the Document, and any Warranty Disclaimers, provided that you also include the original English version of this License and the original versions of those notices and disclaimers. In case of a disagreement between the translation and the original version of this License or a notice or disclaimer, the original version will prevail.

If a section in the Document is Entitled "Acknowledgements", "Dedications", or "History", the requirement (section 4) to Preserve its Title (section 1) will typically require changing the actual title.

## 9. TERMINATION

You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Document except as expressly provided for under this License. Any other attempt to copy, modify, sublicense or distribute the Document is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

## 10. FUTURE REVISIONS OF THIS LICENSE

The Free Software Foundation may publish new, revised versions of the GNU Free Documentation License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns. See <http://www.gnu.org/copyleft/>.

Each version of the License is given a distinguishing version number. If the Document specifies that a particular numbered version of this License "or any later version" applies to it, you have the option of following the terms and conditions either of that specified version or of any later version that has been published (not as a draft) by the Free Software Foundation. If the Document does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published (not as a draft) by the Free Software Foundation.

## **ADDENDUM : How to use this License for your documents**

To use this License in a document you have written, include a copy of the License in the document and put the following copyright and license notices just after the title page :

Copyright ©YEAR YOUR NAME. Permission is granted to copy, distribute and/or modify this document under the terms of the GNU Free Documentation License, Version 1.2 or any later version published by the Free Software Foundation ; with no Invariant Sections, no Front-Cover Texts, and no Back-Cover Texts. A copy of the license is included in the section entitled "GNU Free Documentation License".

If you have Invariant Sections, Front-Cover Texts and Back-Cover Texts, replace the "with...Texts." line with this :

with the Invariant Sections being LIST THEIR TITLES, with the Front-Cover Texts being LIST, and with the Back-Cover Texts being LIST.

If you have Invariant Sections without Cover Texts, or some other combination of the three, merge those two alternatives to suit the situation.

If your document contains nontrivial examples of program code, we recommend releasing these examples in parallel under your choice of free software license, such as the GNU General Public License, to permit their use in free software.

*FIN*