Questions et corrections des examens de matlab

Laurent Claessens

15 septembre 2011

Avant propos

1. Les sources de ce document dont publiées ici :
   `http://gitorious.org/examens-matlab/examens-matlab/trees/master`.
   Merci de m'avertir si il manque des fichiers.
2. Les corrigés sont rédigés pour Octave. De petites différences avec Matlab existent.
3. Les exercices des séances sont tirés des notes «Introduction au logicile Matlab» qui peut être téléchargé sur Icampus, au cours BIR1200. Les exercices des tests sont dûs à Laurent Claessens et Yannick Voglaire.
4. Merci de me signaler toute erreur ou imprécision. Plus vous vous plaignez, plus les étudiants de l'année prochaine auront un document de qualité :)

Table des matières

Chapitre 1

Exercices des séances

1.1 Bases et calcul matriciel

Exercise 1

Évaluez

$$\frac{\sqrt{\sqrt{|x|}+1}\Big(\sin(\exp x^3)+1\Big)}{\operatorname{arctg}(x^2)+\Bigg(\ln\Big(\sqrt{|x|}+1\Big)\Bigg)^{3/2}} \tag{1.1}$$

pour $x = -1.2$.

Correction at page 31.

Exercise 2

Donner une instruction pour construire le vecteur

$$v = (100.5, 90.5, \ldots, 10.5, 0.5). \tag{1.2}$$

Correction at page 31.

Exercise 3

Quelque manipulations de matrices.

1. Construire une matrice $A = (a_{ij})$ de genre 6×6, définie par
$$A = I + u^t u/4 \tag{1.3}$$
où $u = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$.
2. Ajouter 2 à l'élément a_{23} et multiplier par [1] ln(2) la deuxième colonne de A ; on appellera B la nouvelle matrice ainsi obtenue.
3. Calculer la matrice inverse de B et vérifier que le produit BB^{-1} donne (approximativement) l'identité.

1. Matlab donne-t-il le logarithme en base e ou en base 10 ?

4. Résoudre le système $Ax = u^t$ et vérifier que la colonne x obtenue est bien solution.

Correction at page 31.

Exercise 4

Quelque exercices sur les matrices.

1. Donner des instructions (les plus simples possibles) pour produire la matrice A de genre 10×10 ayant la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \pi & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & \pi & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \pi & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} \tag{1.4}$$

. Remarque : les éléments représentés par des pointillés sont tous nuls sauf sur la diagonale principale de A.

2. Calculer les trois premiers éléments de la diagonale principale de A^{-1} et A^5.

Correction at page 32.

Exercise 5

On considère la combustion du propane

$$C_3H_5 + 5O_2 + (\text{air en excès}) \to 3CO_2 + 4H_20 + (\text{air en excès}) \tag{1.5}$$

en présence d'un excès d'air de 25%, ce qui signifie que l'air fournit est égal à 125% de ce qui est requis pour une combustion complète. On demande de calculer le nombre de moles d'air nécessaires à l'entrée pour 100 moles de gaz sortant (celui-ci étant composé de CO_2, de H_20, de O_2 et de N_2). Pour répondre à cette question, on notera

- P le nombre de moles de propane entrant ;
- A le nombre de moles d'air entrant ;
- C le nombre de moles de CO_2 sortant ;
- W le nombre de moles de H_2O sortant ;
- N le nombre de moles de N_2 sortant ;
- X le nombre de moles O_2 sortant ;

toutes ces quantités sont pour 100 moles de gaz sortant.

1. Montrer que ces quantités sont liées par les équations suivantes :

$$\begin{cases} 3P = C & (1.6a) \\ 4P = W & (1.6b) \\ 0.21A = C + \dfrac{W}{2} + X & (1.6c) \\ 0/79A = N & (1.6d) \\ 0.21A = (1.25)(5P)\ C + W + N + X = 100 & (1.6e) \end{cases}$$

(on considère que l'air entrant est composé de 21% de O_2 et de 79% de N_2).

2. Résoudre ce système et déterminer en particulier A.

Correction at page 33.

1.2 Vecteurs à éléments équidistants

Exercise 6

Pour calculer une somme.

1. Construire le vecteur $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{1000})$.
2. En déduire le vecteur $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \ldots, \frac{1}{10^6})$
3. Utiliser ce dernier vecteur pour calculer $\sum_{k=1}^{1000} \frac{1}{k^2}$.

Correction at page 34.

Exercise 7

Calculer

$$\sum_{n=0}^{100} \sin^n(x) \tag{1.7}$$

pour $x = \pi/5$.

Correction at page 34.

Exercise 8

Donner un tableau de valeurs de la fonction $f(x) = \exp(\sin^2(x))$ pour 20 valeurs de x équidistantes de 0 à $\pi/2$.

Correction at page 34.

Exercise 9

Représenter les graphes des fonctions suivantes :

1. $f\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \frac{1}{5}\sin(5x) + \frac{1}{7}\sin(7x)$,
2. $f\colon [-3, 3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt[3]{x^2|x-2|}$,
3. $f\colon [10^{-2}, \pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}\sin(1/x)$.

Correction at page 35.

Exercise 10

Dans un problème d'écoulement turbulent d'un fluide, l'équation

$$1 = \sqrt{c_f}\Big(-0.4 + 1.74\ln(Re\sqrt{c_f})\Big) \tag{1.8}$$

relie le coefficient de friction c_f au nombre de Reynolds Re. Pour $Re = 10^4$, représenter la fonction qui, à c_f, associe le second membre de l'équation (1.8), c_f allant de 0 à 0.05.

Correction at page 36.

1.3 Polynômes et approximations au sens des moindres carrés

Exercise 11

Trouver les racines du polynôme $z^8 + z + 1$ et les représenter dans le plan complexe.

Correction at page 37.

Exercise 12

Le tableau ci-dessous donne la force électromotrice E (en volts) d'une pile, en fonction de la température absolue T en K.

T	290	300	310	320	330
E	1.15053	1.14950	1.14788	1.14656	1.14527

On estime que les valeurs de la force électromotrice peuvent être approchées par les valeurs d'un polynôme du troisième degré

$$E = aT^3 + bT^2 + cT + d. \tag{1.9}$$

1. Déterminer les constantes a, b, c et d.
2. Représenter, dans un même diagramme, le graphe du polynôme et les points correspondant aux données.
3. Estimer la valeur de E pour $T = 316\,\mathrm{K}$.

Correction at page 37.

Exercise 13

Le tableau ci-dessous donne les valeurs de l'énergie E consommée par différents animaux dans la course, en liaison avec la masse m de ces animaux.

Animal	souris	écureil	rat	chien (petit)	chien (gros)	mouton	cheval
Masse m (g)	21	236	384	2.6×10^3	1.8×10^4	3.9×10^4	5.8×10^5
Énergie (cal/g/km)	13	3.7	4.4	1.7	0.92	0.58	0.15

Dans le plan $(\ln(E), \ln(m))$, trouver une droite qui passe approximativement par les points donnés ; quelle est la pente de cette droite ? Représenter, dans un même diagramme, cette droite et les points correspondants aux données.

Correction at page 38.

Exercise 14

Le tableau ci-dessous donne la conductivité molaire Λ (en $\Omega^{-1}\mathrm{cm}^2/\mathrm{mol}$) de l'acide chlorhydrique, en fonction de la concentration c (en $\mathrm{mol}/\mathrm{dm}^3$),

c	0.0005	0.001	0.005	0.01	0.02	0.05
Λ	422.74	421.36	415.80	412.24	407.24	399.09

On considère que la relation entre Λ et c est donnée approximativement par une formule du type

$$\Lambda = a_0 + a_1 c^{1/2}. \tag{1.10}$$

Trouver les coefficient a_0 et a_1 à partir des données et représenter dans un même diagramme les valeurs donnes et le graphe de la fonction définie par (1.10).

Indication : Le second membre de (1.10) peut être vu comme un polynôme du premier degré en $c^{1/2}$.

Correction at page 38.

1.4 Intégration numérique et résolution d'équations différentielles

Exercise 15

La chaleur spécifique $C!v$ (en J/K/mol) d'un solide monoatomique varie en fonction de la température absolue T suivant la loi

$$C_V = \frac{9R}{x_m^3} \int_0^{x_m} \frac{e^x x^4}{(e^x - 1)^2} dx \tag{1.11}$$

où $R = 8.314$J/K/mol et $x_m = \Theta_D / T$, Θ_D étant la température de Debye, qui dépend du solide considéré. Déterminer la chaleur spécifique pour $T = 300$K, dans le cas du cuivre, pour lequel $\Theta_D = 313$K.

Correction at page 39.

Exercise 16

La fonction

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt \tag{1.12}$$

est appelée *intégrale de Dawson.*

1. Calculer $f(1)$
2. Déterminer une solution de l'équation $f(x) = 0.5$. (Indication : cette solution est proche de 0.7)

<++>

Correction at page 39.

Exercise 17

On considère le problème

$$\begin{cases} y' = 1 + y^2 & (1.13a) \\ y(0) = 0. & (1.13b) \end{cases}$$

1. Calculer la solution sur l'intervalle $[0, 1.5]$.

2. La solution exacte de ce problème est $y(x) = \tan(x)$. Représenter dans un même diagramme la solution exacte et la solution approchée calculée plus haut.

Correction at page 40.

Exercise 18

On considère le problème

$$\begin{cases} y' = x^2 + y^2/4 & (1.14a) \\ y(0) = 0.2. & (1.14b) \end{cases}$$

1. Calculer la solution sur l'intervalle $[0, 1.5,]$.
2. Représenter, dans un même diagramme, le graphe de la solution y et celui de sa dérivée y'.

Correction at page 41.

1.5 Exercices variés

Exercise 19

On considère la suite $\{x_n\}$ définie par

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_n &= \sqrt{2 + x_{n-1}}. \end{aligned} \tag{1.15}$$

1. Écrire un programme permettant de calculer x_{12}.
2. Écrire une fonction permettant de calculer x_n en fonction de n.

Correction at page 41.

Exercise 20

Écrire une programme permettant de construire à partir des vecteurs donnés

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y &= (y_1, y_2, \dots, y_n) \\ z &= (z_1, z_2, \dots, z_n) \end{aligned} \tag{1.16}$$

la matrice

$$\begin{pmatrix} x_1 & z_1 & 0 & \cdots & 0 \\ y_1 & x_2 & z_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & y_2 & x_3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & z_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & y_{n-1} & x_n \end{pmatrix}. \tag{1.17}$$

Considérons maintenant la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{1.18}$$

de genre $n \times n$. En utilisant le programme qui précède, écrivez un programme qui permettant de représenter, en fonction de n variant de 1 à 20, le déterminant de la matrice A.

Correction at page 42.

Exercise 21

Reprenons notre intégrale de Dawson

$$f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt. \tag{1.19}$$

1. Calculer $f(1)$;
2. Représenter le graphe de f sur l'intervalle $[0, 0.5]$.

Correction at page 42.

Exercise 22

Étant donnés deux vecteurs $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, écrivez un programme donnant le vecteur $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ dont la composante numéro i est celui des deux nombres x_i, y_i qui est le plus grand en valeur absolue.

Correction at page 42.

Exercise 23

Représenter le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [1, 10] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} (\ln(x) + 2)^2 & \text{si } \ln(x) - x + 2 \geq 0 \\ x^2 - 4x & \text{si } \ln(x) - x + 2 < 0. \end{cases} \end{aligned} \tag{1.20}$$

Correction at page 42.

Exercise 24

Rechercher la solution sur l'intervalle $[0, 6,]$ du problème

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (1.21a) \\ y(0) = -1 & (1.21b) \end{cases}$$

si

$$f(x, y) = \begin{cases} -y^2 + x & \text{si } y \geq 0 \\ -y + x^2 & \text{si } y < 0. \end{cases} \tag{1.22}$$

Correction at page 43.

Chapitre 2

Anciens tests et examens

2.1 BIR1200 en 2009

Exercise 25

Représenter le graphe de la fonction

$$\begin{aligned} f\colon [-3,3] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto (1+x)e^{-x^2+3x\cos(x)} - (1+x^4)^2\sin(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Correction at page 43.

Exercise 26

Calculez

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{\sin(k)}.$$

Note : Étymologiquement, c'est cette somme qui a donné son nom aux assiettes gyros spéciales avec frites.

Correction at page 44.

Exercise 27

Le roi, pour remercier l'inventeur de l'assiette gyros avec frites de sa belle invention, lui a dit qu'il mettrait 1 euro sur la première frite, 1/4 euros sur la seconde, *et cætera* jusqu'à la centième frite. Calculez

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{1}{k^2}$$

pour savoir combien tout cela va coûter au trésor royal.

Correction at page 44.

Exercise 28

Calculez
$$\sum_{k=1}^{100} 2^k.$$

Correction at page 44.

Exercise 29

Tracer le graphe du polynôme $P(x) = x^7 - 5x^2 + 2$ entre -2 et 2.

Correction at page 44.

Exercise 30

Pour quelle valeur proche de zéro est-ce que $\cos(x) = x$?

Correction at page 44.

Exercise 31

Pour quelle valeur proche de zéro est-ce que $\ln(x) = \sin(x)$?

Correction at page 45.

Exercise 32

Lorsqu'on achète une assiette gyros spéciale avec frites, on observe les prix suivants, en fonction du nombre de frites :

1. avec 20 frites, 5.2 euros ;
2. avec 50 frites, 7.5 euros ;
3. avec 73 frites, 9.6 euros ;
4. avec 100 frites, 14 euros.

En supposant une progression linéaire du prix en fonction du nombre de frites, estimez combien coûterait une assiette gyros avec 307 frites.

Correction at page 45.

Exercise 33

Représentez dans le plan complexe les racines du polynôme
$$z^9 + z^8 + z^7 + \ldots + z^2 + z + 1 \tag{2.2}$$
en les marquant d'un rond.

Représentez ensuite le polynôme pour z allant de 0 à 3.

Correction at page 45.

Exercise 34

Thorgal, XIII, Kid Paddle et Gaston se rendent dans un Kebab. Thorgal prend 8 assiettes gyros spéciales, 10 frites et 6 boissons. Il paie 43 euros. XIII mange 2 frites et deux boissons, mais ne prend pas d'assiette gyros spéciale, et il paie 9 euros. Kid Paddle se contente d'une assiette gyros spéciale et d'une boisson et paie 4.5 euros.

Gaston voudrait prendre une assiette gyros spéciale avec frites. Combien devra-t-il payer ?

Indice : si A, F et B désignent les prix des assiettes, des frites et des boissons, il faut résoudre le système

$$\begin{cases} 8A + 6B + 10F = 43 \\ 2B + 2F = 9 \\ A + B = 4.5 \end{cases}$$

et en déduire la valeur de $A + F$.

Correction at page 45.

Exercise 35

Représentez sur le même diagramme les graphes des fonctions

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

et

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

sur l'intervalle $[-2, 2]$.

Correction at page 45.

Exercise 36

Donnez une valeur approximative de

$$\int_0^{\pi/2} \sin(7x)\cos(5x)dx \tag{2.4}$$

Correction at page 45.

Exercise 37

Considérez la fonction

$$f(x) = \int_0^x \cos\Big(\sin(t)\Big)dt. \tag{2.5}$$

1. Trouvez une valeur de x proche de 0.3 telle que $f(x) = \frac{1}{4}$. Nous nommons x_0 cette valeur.
2. Tracez le graphe de f sur un intervalle raisonnable autour de x_0, et marquez le point $(x_0, \frac{1}{4})$ par un petit cercle.

Correction at page 45.

Exercise 38

Un restaurateur prétend que ses ventes d'assiettes gyros spéciales avec frites ont progressé avec le temps selon la courbe donnée par la fonction

$$g(t) = e^{\cos(t)}\sin(t-1)^2 + 2\sqrt{t^3 + 7t}. \tag{2.6}$$

Représentez cette courbe sur un graphique pour l'intervalle de temps $t \in [0, 10]$.

Correction at page 45.

Exercise 39

Résolvez le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -(x^2 + y^2) & (2.7a) \\ y(0) = 1. & (2.7b) \end{cases}$$

Calculez et tracez la solution sur l'intervalle $[0, 2]$.

Correction at page 46.

Exercise 40

En relativité, on démontre que si la longueur d'un objet est l_0, alors un observateur en mouvement à la vitesse v mesurera une longueur donnée par

$$l(v) = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{2.8}$$

où $c = 3 \cdot 10^8$ m/s est une constante physique.

Tracez le graphe de la longueur $l(v)$ observée en fonction de v dans le cas d'un objet de taille $l_0 = 1.3$ m, pour v allant de 0 à $3 \cdot 10^8$ m/s.

Correction at page 46.

Exercise 41

La production mondiale de pétrole, en milliers de barils par jours, de la dernière décennie est donnée par

Année	1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Production	72231	73588	72377	74916	74847	74478	77031	80326

Année	2005	2006	2007
Production	81255	81659	81533

1. Donnez les valeurs correspondantes, en milliards de barils par an. Nous vous rappelons que le facteur de conversion est de 365 jours par an, et de 10^6 milliers par milliards. Enregistrez le résultat dans le vecteur `consommation`.
2. Trouvez les meilleurs constantes a et b telles que le vecteur `consommation` soit approximé par la droite
$$aT + b \tag{2.9}$$
où T est l'année.
3. Tracez, dans un même diagramme, les données et la droite trouvée, et prolonger la droite jusqu'en 2050. Quelle consommation mondiale serait atteinte selon cette prolongation linéaire ?

Questions bonus (à ne faire que s'il vous reste du temps, ne comptent pas pour des points) :

1. Comparez les résultats obtenus avec la réserve globale de pétrole qui reste sous nos pieds en 2009 : environ 1240 milliards de barils. En particulier, calculez la somme
$$\sum_{T=2009}^{2050} aT + b. \tag{2.10}$$
2. Où peut-on trouver des assiettes gyros spéciales avec frites à Louvain-la-Neuve ?

Correction at page 46.

Exercise 42

Représentez le graphe de la fonction

$$f(x) = (1 + x^{e^3})\sin(x^3) + \cos(3x)$$

sur l'intervale $[-3, 2]$.

Correction at page 47.

Exercise 43

Représentez le graphe de la fonction

$$f(x) = 37\tan(x^2)\sin(x^3) + \cos(3x)$$

sur l'intervale $[-3, 2]$.

Correction at page 47.

Exercise 44

1. Représentez dans un même diagramme les fonctions $\sin(x)$ et $1/x$ entre 0.2 et π.
2. Trouvez les deux premières solutions positives de l'équation
$$\sin(x) = 1/x$$
après avoir repéré approximativement ces solutions à l'aide du diagramme de la sous-question précédente.
3. Représentez dans le même diagramme les deux fonctions, et les deux racines marquées d'une croix ou d'un rond.

Correction at page 47.

Exercise 45

1. Représentez dans un même diagramme les fonctions $\sin(x^2)$ et $\exp(x)/4$ entre 0 et 2.

2. Trouvez les deux premières solutions positives de l'équation

$$\sin(x^2) = \exp(x)/4$$

après avoir repéré approximativement ces solutions à l'aide du diagramme de la sous-question précédente.

3. Représentez dans le même diagramme les deux fonctions, et les deux racines marquées d'une croix ou d'un rond.

Correction at page 47.

Exercise 46

1. Construisez une fonction `assiettegyrosspeciale` d'une variable x qui renvoie la valeur du polynôme

$$3x^8 + 6x^5 - 2x^4 + 6x^3 - x + 1$$

au point x (utilisez le vecteur des coefficients du polynôme).

2. Construisez une fonction `avecfrites` de deux variables a et b qui renvoie comme résultat l'intégrale de a à b de la fonction définie ci-dessus.
3. Donnez la valeur de la fonction `avecfrites` lorsque $a = 2$ et $b = 5$.

Correction at page 48.

Exercise 47

1. Calculez le polynôme p, de degré égal à 10, vérifiant les conditions

$$p(x) = (-1)^x \quad \text{pour} \quad x = 0, 1, \ldots, 10.$$

2. Représentez ce polynôme, en marquant d'une croix les points du graphe correspondant aux données.
3. Déterminez les racines du polynôme.

Correction at page 48.

Exercise 48

On considère la fonction $f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto 1/(1 + 25x^2)$.

1. Créez une fonction Matlab pour f.
2. Construisez le vecteur v contenant 11 points équidistants entre -1 et 1, les extrémités -1 et 1 faisant partie de ces points.
3. Donnez (sous forme du vecteur de ses coefficients) le polynôme d'approximation de degré 11 pour les données $v, f(v)$.
4. Représentez dans un même diagramme les graphes de la fonction f et de son polynôme d'approximation.

Correction at page 48.

Exercise 49

Le professeur Gyros a observé, pendant 12 jours, la croissance d'une population de bactéries dans une assiette de frites. Malheureusement il a égaré une partie des résultats et voudrait les reconstituer à partir du tableau partiel suivant (on ne se préoccupera pas des unités dans lesquelles est exprimée la taille de la population).

Jour (j)	1	3	6	7	10	12
Population ($P(j)$)	12	16	30	35	63	90

En supposant que la croissance de population obéisse à peu près à une loi du type $P(j) = Ce^{\lambda j}$, trouvez les coefficients C et λ et utilisez ces estimations pour compléter le tableau ci-dessus.

Indication : L'approximation demandée revient à une approximation par un polynôme du premier degré pour $\ln(P(j))$.

Correction at page 48.

Exercise 50

Définissez une fonction qui, à un entier n, associe la matrice A_n suivante, de genre $(n+1) \times (n+1)$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(n)^3} & 0 & \frac{1}{(2)^4} & 0 & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(n-1)^3} & 0 & \frac{1}{(3)^4} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{(n-2)^3} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n-1)^4} & 0 \\ \vdots & & & & \frac{1}{(2)^3} & 0 & \frac{1}{(n)^4} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : Utilisez la commande **`diag(v,k)`***. Si vous n'arrivez pas à créer la fonction, construisez simplement la matrice pour* $n = 7$ *(elle est alors de genre* 8×8*).*

Correction at page 48.

Exercise 51

Définissez une fonction qui, à un entier n, associe la matrice A_n suivante, de genre $(n+1) \times (n+1)$:

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{1}{(n)^4} & 0 & \frac{1}{(2)^3} & 0 & & & \vdots \\ 0 & \frac{1}{(n-1)^4} & 0 & \frac{1}{(3)^3} & & & \vdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{(n-2)^4} & 0 & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \frac{1}{(n-1)^3} & 0 \\ \vdots & & & & \frac{1}{(2)^4} & 0 & \frac{1}{(n)^3} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : Utilisez la commande `diag(v,k)`*. Si vous n'arrivez pas à créer la fonction, construisez simplement la matrice pour $n = 7$ (elle est alors de genre 8×8).*

Correction at page 48.

Exercise 52

Un restaurateur aimerait connaître *le nombre de cuivre*, c'est-à-dire l'épaisseur idéale d'une tranche de viande pour ses gyros. Pour ce faire, il a effectué des tests de découpe à différentes épaisseurs et les a fait goûter à un échantillon de 3 personnes représentatives de la société belge. Après avoir obtenu ses données et effectué de long calculs, il est arrivé au fait que le nombre de cuivre devait être égal au déterminant de la matrice

$$A = (v^t.v)^2 + 42(v^t.v) - 2I$$

où le vecteur v contient les épaisseurs allant de 0.7 à 8.76 mm en exactement 13 valeurs extrémités comprises, et où I est la matice identité de genre 13×13.

Bonne âme que vous êtes, vous décidez de l'aider, et vous

1. construisez en une opération le vecteur v ;
2. construisez la matrice A en un tournemain ;
3. donnez fièrement la valeur du nombre de cuivre [1].

Correction at page 48.

Exercise 53

1. Construisez en une opération le vecteur v dont les 5 composantes sont équidistantes et comprises dans l'intervalle $[\pi, 2\pi]$, π et 2π étant les première et dernière composantes de v.

1. et vous rendez compte qu'il s'est royalement planté dans ses calculs et que vous ne connaîtrez jamais la valeur du nombre de cuivre.

2. Construisez une matrice $A = (a_{ij})$ de genre 5×5, définie par

$$A = (v^t.v)^3 + 4I$$

où I est la matrice identité de genre 5×5.

Correction at page 48.

Exercise 54

1. Construisez la matrice A donnée par

$$A = v^t.v$$

où $v = (10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$.

2. Construisez le vecteur u défini par

$$u = w.A^3 + 4v$$

où I est la matrice identité de genre 10×10 et w est le vecteur de même taille que v dont les composantes sont le carré des composantes correspondantes de v.

3. Remplacez la troisième composante de u par le nombre 7.

Correction at page 48.

Exercise 55

Un échantillon contenant trois substances radioactives voit son activité décroître suivant une loi du type

$$f(t) = ae^{-\lambda_1 t} + be^{-\lambda_2 t} + ce^{-\lambda_3 t}.$$

On suppose que $\lambda_1 = 1.23$, $\lambda_2 = 0.26$, $\lambda_3 = 0.1$, le temps t étant exprimé en jours.

1. En résolvant un système linéaire de trois équations à trois inconnues, calculez a, b et c sachant que

$$f(0) = 100, f(2) = 62, f(6) = 32.$$

2. Avec les valeurs de a, b, c obtenues ci-dessus, définissez la fonction f dans un fichier et utilisez cette définition pour représenter le graphe de f sur l'intervalle $[0, 8]$.

3. Trouvez $\tau \in [0, 6]$ tel que $f(\tau) = 50$.

Correction at page 48.

Exercise 56

Dans le jargon du métier, le système suivant s'appelle « l'équation de l'assiette gyros spéciale avec frites ».

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 3 \\ 6x + 3y + 2z &= -2 \\ 5x + 2z &= 9. \end{aligned}$$

Pour votre culture générale, et pour réussir l'examen, résolvez-le.

Correction at page 48.

Exercise 57

Résolvez le système linéaire suivant :

$$\begin{aligned} 3x + 7y + 5t &= 3 \\ 6x + 3y + 2z - 2t &= -2 \\ 3x + 1z + 4t &= 9 \\ 6y + 5z - 7t &= 1. \end{aligned}$$

Correction at page 49.

Exercise 58

1. Construisez une fonction qui prend comme variables deux vecteurs lignes v et w de même longueur, et qui en renvoie le produit scalaire.
2. Calculez le produit scalaire des vecteurs $v = (\sin(1), \sin(2), \ldots, \sin(100))$ et $w = (1/1, 1/2, \ldots, 1/100)$.

Correction at page 49.

Exercise 59

1. Construisez une fonction qui prend comme variables deux vecteurs v et w à trois composantes, et qui en renvoie le produit vectoriel
$$v \times w = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_3 w_2).$$
2. Construisez une fonction qui à un réel x associe la norme du produit vectoriel des vecteurs $v = (1, 2, x)$ et $w = (4, 5, 6)$.
3. Donnez la valeur de cette fonction au point $x = 2$.

Correction at page 49.

Exercise 60

1. Construisez la fonction
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0, \\ x^3 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$
de manière à ce qu'elle puisse prendre comme argument un vecteur x (utilisez `for` et `if`).

2. Représentez la fonction f sur l'intervalle $[-3, 3]$.

Correction at page 49.

Exercise 61

Entourez la ou les syntaxes correctes pour

1. résoudre le système linéaire $Ax = b$:

   `Ax=b`, `A*x=b`, `x=b/A`, `b=A\x`, `x=b\A`, `x=A\b`, `x=solve(A,b)` ?

2. créer un vecteur v à 10 composantes équidistantes entre a et b ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) :

   `v=a:10:b`, `v=a:b:10`, `v(10)=a:b`, `v=a:(b-a)/10:b`, `v=a:(b-a)/9:b` ?

3. constuire un vecteur contenant les composantes 3 à 5 d'un vecteur v à 7 composantes :

   `v(3,4,5)`, `[v(3):v(5)]`, `[v(3) v(4) v(5)]`, `v(3:5)`, `v[3:5]`, `v(3,5)`

Correction at page 49.

Exercise 62

La différence entre le nombre de frites dans une assiette gyros spéciale et le nombre de frites hors d'une telle assiette dans le monde est donnée en fonction du temps (en années du calendrier courant) par le polynôme

$$-\,7\,815\,222\,954\,x + 11\,815\,611\,x^2 - 5\,954\,x^3 + x^4. \tag{2.11}$$

1. Trouvez les dates auxquelles il y a eu, dans le monde, autant de frites dans et hors d'une assiette gyros spéciale.
2. Déduisez-en que l'an 0 fut une année très spéciale.

Correction at page 49.

Exercise 63

Calculez la somme

$$\sum_{k=1}^{1000} \sin(\exp((k-1)^2).$$

Correction at page 49.

Exercise 64

Pour quelle valeur proche de zéro est-ce que $\ln(x) = \sin(x)$?

Correction at page 49.

Exercise 65

Résolvez le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -3(y^2+1) \\ y(\frac{\pi}{4}) = 5 \end{cases}$$

entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{3\pi}{4}$.

La solution exacte est donnée par $y(x) = 3\cot(x) + 2$. Représentez dans un même diagramme cette solution exacte et l'approximation trouvée.

Correction at page ??.

Exercise 66

Si vous aimez les assiettes gyros spéciales avec frites, résolvez le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x = 3y \\ 5z = 8+x. \end{cases}$$

Si vous ne les aimez pas, résolvez-le également.

Dans les deux cas, donnez le déterminant de la matrice du système et définissez une variable `gyros` qui contient la valeur de y après résolution.

Correction at page ??.

Exercise 67

Calculez la profondeur en mètres à laquelle il faut enterrer une assiette gyros spéciale avec frites pour ne plus sentir ses douces effluves. Autrement dit, calculez

$$\sum_{n=1}^{100}\Big(\cos(n)+\sin(n)\Big).$$

Note purement informative : C'est un nombre négatif.

Correction at page ??.

Exercise 68

Tracez le graphe de $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ pour $x \in [-20, 20]$.

Correction at page ??.

Exercise 69

Calculer la valeur de

$$\int_{-7}^{7}\Big(7x^{11} - 5x^3 + \pi\sin(x)\Big).$$

Correction at page ??.

Exercise 70

Optimiser des situations commerciales revient régulièrement à résoudre des équations différentielles. En cherchant à optimiser la section des frites pour la préparation des assiettes gyros spéciales avec frites, un ingénieur en machines à découper les frites doit résoudre le problème de Cauchy suivant pour $x \in [0, 2]$:

$$\begin{cases} y' = -\sin(x)y \\ y(0) = e. \end{cases}$$

Enregistrez la solution dans les vecteurs `x` et `y`. La solution exacte du problème est donnée par $y(x) = e^{\cos(x)}$. Tracez cette solution exacte et la solution approchée dans un même diagramme.

Correction at page **??**.

Exercise 71

En regardant dans les nuages, Chuck Norris en a observé un qui avait la forme d'une assiette gyros spéciale avec frittes, et un autre qui avait la forme du graphe de

$$f(x) = u\cos(x) + v\sin^2(x)$$

où $u = 9.81$ et $v = \sqrt{\pi/2}$.

En ce qui concerne l'assiette gyros, Chuck Norris l'a obtenue dans un restaurant végérarien sans problèmes. En ce qui concerne le graphe de la fonction, il te demande

1. de tracer le graphe de cette fonction lorsque $x \in [-5, 5]$,
2. de trouver pour quelle valeur non loin de $x = 1$, est-ce que $f(x) = 6$.

Correction at page **??**.

Exercise 72

Un jour, Cauchy était en train de manger une assiette gyros spéciale avec frites quand il s'est demandé quelle fonction vérifiait les conditions

$$\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Hélas, Cauchy ne disposait pas d'un ordinateur, et ne connaissait donc que la solution exacte $y(x) = e^{x^2} - e$. Trouvez, grâce à Matlab, une solution approchée au problème de Cauchy et tracez-la entre 0 et 5 sur le même diagramme que la solution exacte.

Correction at page **??**.

2.2 MAT1151 en 2010

Exercise 73

Dessiner la fonction $y(x) = xe^{-x/a}$ entre -2 et 10 pour la valeur du paramètre $a = 3$. Mettre, sur le même graphe, un petit rond sur le maximum de la fonction.

Pour information, la dérivée de y est

$$y'(x) = -\frac{1}{3}xe^{-x/3} + e^{-x/3}.$$

Correction at page 50.

Exercise 74

Donner

$$\sum_{i=5}^{1000} \frac{1}{\sin(i)}$$

Correction at page 51.

Exercise 75

Abusons des extrapolations... J'ai regardé les deux derniers chiffres du code barre de mes 4 derniers achats. Le résultat est :

Numéro de l'article	1	2	3	4
Fin du code barre	82	96	98	90

En utilisant une approximation polynomiale d'ordre 3, deviner les deux derniers chiffres du prochain article que j'achèterai.

Correction at page 51.

Exercise 76

Écrire la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec un minimum de commandes.

Correction at page 51.

Exercise 77

Le travail d'une grue qui soulève un bloc de masse m d'une hauteur h à la surface de la Terre est donné par

$$W(h) = \int_R^{R+h} \frac{GMm}{r^2} dr \tag{2.16}$$

où $R = 6.500.000$ mètres est le rayon de la Terre et le produit GM vaut environ $4.144 \cdot 10^{14}$

Tracer le graphique du travail nécessaire pour monter une masse $m = 1$ à la hauteur h en fonction de h entre $h = 0$ et $h = 10.000$.

Questions bonus (ne comptent pas pour des points)

1. Quelles sont les unités de W dans le SI ?
2. Est-ce que vous êtes capables d'interpréter le résultat ?
3. Essayez de tracer le graphique beaucoup plus loin que $h = 10000$.

Correction at page 51.

Exercise 78

Calculer

$$\sum_{k=30}^{90} e^{-k/10}.$$

Correction at page 52.

Exercise 79

Il y a un proverbe qui dit que celui qui calculera

$$\sum_{j=4}^{250} \frac{1}{\sqrt{j}} \cos(x^j) \tag{2.17}$$

pour $x = 0$ gagnera des points à son test de Matlab.

Vérifier le proverbe, c'est à dire donner la valeur de la somme.

Correction at page 52.

Exercise 80

Chuck Norris, un p'ti blond aux yeux bleus et une étudiante en Matlab sont dans un bateau. Après avoir percuté un iceberg, le pt'it blond se jette à l'eau en jurant que

$$2x + 3y - z - 20 = 0; \tag{2.18}$$

Chuck Norris termine le trajet à la nage jusqu'au Texas d'où il envoie un SMS à l'étudiante disant que

$$y + z = 4. \tag{2.19}$$

Après avoir trouvé un bateau de rechange, l'étudiante découvre dans sa poche un papier sur lequel il est écrit que

$$-2x + y + z = 0. \tag{2.20}$$

Comment va elle s'y prendre pour calculer les nombres x, y et z en sachant qu'elle n'utilise que Matlab ?

1. Prouver que le système a une solution unique en donnant le déterminant de la matrice correspondante.
2. Donner les valeurs de x, y et z qui résolvent le système.

Correction at page 52.

Exercise 81

Nous considérons la fonction

$$f(x) = x^2 \int_0^x \sqrt{t} \cos(t) dt. \tag{2.21}$$

1. Donner $f(1)$,
2. tracer f pour $x \in [0,3]$,

Correction at page 52.

Exercise 82

Cauchy est un petit garçon plein de problèmes. L'un d'entre eux est de trouver la fonction $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ telle que pour chaque $x \in \mathbb{R}$ on ait

$$f'(x) = \frac{1}{2}f(x) + 2e^{x/2}\cos(2x), \tag{2.22}$$

et telle que

$$f(0) = 0. \tag{2.23}$$

Le petit Augustin Cauchy serait très content que tu lui traces une solution approchée (trouvée par Matlab) sur le même graphique que la solution exacte donnée par

$$y(x) = \sin(2x)e^{x/2}. \tag{2.24}$$

Correction at page 53.

Exercise 83

Dora l'exploratrice voudrais explorer la convergence de la série $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{\cos(n)}$. Sa carte lui a dit quelque chose en anglais, mais comme Dora ne comprends pas tellement bien cette langue, elle a (comme toujours) besoin de ton aide. Voici ce que tu dois faire :

1. Donne $\sum_{n=1}^{100} 2^{\cos(n)}$,
2. Définis la fonction $s(N) = \sum_{n=1}^{N} 2^{\cos(n)}$ et donne les valeurs de $s(k)$ pour tous les k entiers entre 100 et 200.
3. Prouve que la série ne converge pas.

Note : Si tu fais seulement le point 1, Dora sera très contente et son cousin Diego fera le reste lui-même. En d'autres termes : **les secondes et troisièmes partie sont facultatives et ne comptent pas pour des points**.

Correction at page 53.

Exercise 84

Blanche Neige a mesuré ses sept nains, mais le Schtroumpf farceur a effacé certains résultats (en plus de lui avoir fait un paquet cadeau qui lui a détruit la coiffure dont elle était super fière). Voici les résultats qui restent :

Numéro du nain	1	2	3	4	5	6	7
Taille	130	120	?	123	114	?	131

(2.25)

Trouver un polynôme de degré 3 qui correspond le mieux possible aux données restantes, et donner une approximation de la taille des nains numéros 3 et 6.

Correction at page 54.

Chapitre 3

Conseils généraux

3.1 Écriture d'une fonction

Lorsque vous créez une fonction, veillez aux éléments suivants

1. La première ligne doit être de la forme

   ```
   function retour=nom_de_fonction(x)
   ```

   La valeur de la fonction sera celle de la variable `retour` lorsqu'on arrivera à la fin de la fonction. De plus, cette fonction doit être sauvée dans le fichier `nom_de_fonction.m`.

Noms des fichiers

1. Tenez vous en à l'alphabet latin et les chiffres arabes (et non le contraire).
2. Le nom de fichier ne peut pas *commencer* par des chiffres
3. Évitez absolument de mettre des caractères spéciaux qui peuvent avoir un sens mathématique : «(», «'»,«-»,«+»,...
4. Évitez de mélanger les majuscules et les minuscules. Il existe encore des personnes qui utilisent Windows (qui est le seul système à ne pas faire la distinction). Certes ces personnes sont peu nombreuses, mais il en reste encore assez [1] pour que cela pose des problèmes de temps en temps.
5. Ne mettez pas de points dans le nom de vos fichiers (à part `.m`).

3.2 Conception des fonctions

Une fonction doit prendre un nombre (ou une matrice) en entrée et sortir un nombre à la fin. Une fonction doit seulement générer des nombres (ou des matrices).

1. En fait, toutes les personnes qui ont un ado dans la maison qui a envie de jouer eux Sims.

Vous ne devez pas mettre de commandes comme `plot` dans une fonction. Même si cela fonctionne de temps en temps, ce n'est pas une bonne idée. En principe, vous devez concevoir vos fonctions de telle façon à ce qu'elles n'affichent rien.

Les commandes qui doivent *afficher* des résultats se mettent dans un script (blank M-file). Créez un tel script par exercice, même si l'exercice se décompose en sous questions.

3.3 Autres

Si un résultat dépend d'un calcul intermédiaire, ne faites *jamais* le calcul dans la fenêtre principale pour en copier-coller le résultat dans votre script. Faites faire le calcul dans votre script, et enregistrez le résultat dans une variable. Ainsi vous gardez toutes les décimales que Matlab avait calculées sans les afficher. Et cela, même si ladite réponse intermédiaire est un nombre entier.

Chapitre 4

Quelque corrections

Correction of the exercise 1

Pour produire ce genre d'expressions complexes, une bonne idée est de la diviser en plusieurs morceaux affin d'éviter de devoir travailler avec trop de parenthèses en même temps.

```
function y = ma_fonction(arg)
   sq = sqrt(abs(arg))+1;
   a = sqrt(sq);
   b = sin( exp(arg.^3)+1 );
   numerateur = a*b;   % 1.3371
   c = atan(arg.^2);
   d = (log(sq)).^(3/2);
   denominateur = c+d;   % 1.6001
   y = numerateur/denominateur;   % 0.83566
end

reponse = ma_fonction(-1.2)
```

Correction of the exercise 2

Une bonne lecture est
`http://en.wikibooks.org/wiki/Octave_Programming_Tutorial/Vectors_and_matrices`.

```
v = 100.5:-10:0.5
```

La subtilité de cet exercice est que l'on peut demander un pas négatif.

Correction of the exercise 3

```
u = 1:6            # u = 1:1:6 fait la même chose.
A = eye(6)+(u'*u)/4

B = A

B(2,3) = A(2,3)+2
B(:,2) = log(2)*B(:,2)      # B(:,2) représente la deuxième colone de B

C = inv(B)*B
comparaison = eye(6)-C

erreur_max = max(max(abs(comparaison)))
# max appliqué à une matrice retourne le vecteur
# qui contient le plus grand de chaque colone.
# Donc il faut appliquer deux fois max pour prendre le max de ces max

solution = A\u'

verification = A*solution - u'
erreur_max = max(abs(verification))
```

Correction of the exercise 4

```
A = pi*eye(10)
A(1,10) = -1
A(10,1) = 1

inverse = inv(A)
puissance = A^5

diag(inverse)(1:3)
   %0.28903
   %0.31831
   %0.31831


diag(puissance)(1:3)
    %11.665
   %306.020
   %306.020
```

Correction of the exercise 5

En ce qui concerne l'équation chimique, on a

$$P(C_3H_8)+\cdots O_2+A(0.21O_2+0.79N_2)\to C(CO_2)+W(H_2O)+\frac{N}{0/79}(0.21O_2+0.79N_2) \tag{4.1}$$

Le $N/0.79$ sert à faire qu'il y ait N moles de N_2 qui sortent, comme demandé. À partir de là, il faut comprendre que le nombre de moles de O_2 qui sortent est $(0.21)*(N/0.79)$. Cela est X.

Les trois petits points signifie que ce O_2 est «virtuel». En réalité il est inclus dans l'air, et donc dans le A

- bilan carbone : $3P = C$
- bilan hydrogène : $8P = 2W$
- bilan azote : $0.79A = N$

En ce qui concerne le bilon d'oxygène, il y a deux choses à faire.

- D'abord le $5O_2$ doit venir de l'air, et on sait qu'il en fait $5P$, donc on peut croire que $0.21A = 5P$. Hélas, les choses ne sont pas aussi simple : le A fournit un *excès* d'air. Donc le $0.21A$ n'est en réalité pas $5P$, mais 125% de $5P$. Nous avons donc $0.21A = (1.25)*(5P)$
- Le bilan oxygène (à compter en atomes, et non en molécules O_2 !!) s'écrit $0.21A = C + (W/2) + X$

Enfin, on impose qu'il y ait exactement 100 moles qui sortent, c'est à dire $C + W + B + X = 100$.

Le reste du problème est pour Matlab.

```
M=
[3          0       -1       0       0   0
 4          0       0       -1       0   0
(1.25)*5    -0.21    0   0           0   0
 0          0.21    -1        -0.5   0    -1
 0          0       1       1       1   1
 0          0.79    0       0       -1   0
 ]
u = [0 0 0 0 100 0]

reponse = M\u'
    %3.1484
   %93.7031
   % 9.4453
   %12.5937
   %74.0255
```

```
   % 3.9355

air = reponse(2)   # Parce qu'on a mit A dans la 2ième colone de M
 %93.703
```

Correction of the exercise 6

```
longueur = 1000
a = 1:1:longueur
b = 1./a
c = b.^2

sum(c)   %1.6439
```

Notez que l'on s'est bien garder de coder «en dur» le nombre 1000. Nous avons une fois pour toutes posé `longueur=1000` et puis nous avons utilisé la variable.

Il est fortement conseillé de travailler d'abord avec `longueur=4` pour voir si tout va bien. Au moins jusqu'à 4 vous devriez être capables de faire les calculs à la main et détecter des erreurs si il y en a.

Correction of the exercise 7

```
function y = somme(arg)
   taille = 10
   v = 0:taille
   w = sin(arg).^v
      # L'astuce est de faire a.^v pour faire [a^i for i in v]
   y = sum(w)
end

somme(pi/5) %2.4189
```

Correction of the exercise 8

```
debut = 0
fin = pi/2
nombre = 20

v = debut:(fin-debut)/(nombre-1):fin
```

```
# Juste pour rire : vérification que c'est bien équidistant :
for i = 2:length(v)         # length(v) donne la longueur du vecteur v
   v(i)-v(i-1)
endfor

function y = f(x)
   y = exp(sin(x).^2)
endfunction

f(v)
%1.0000
%1.0068
%...
%2.6998
%2.7183
```

Correction of the exercise 9

```
function y = f1(x)
   y = sin(x)+sin(3*x)/3+sin(5*x)/5+sin(7*x)/7
end

function y = f2(x)
   y = (x.^2.*abs(x-2)).^(1/3)
end

function y = f3(x)
   y = sqrt(x).*sin(1./x)
end

# Créer un vecteur avec les valeurs où on va calculer la fonction
echantillon = 0:0.1:2*pi
# Créer le vecteur avec les valeurs de la fonction
v = f1(echantillon)
# Créer le graphique
plot(echantillon,v)
# Enregistrer le graphique dans exo24_f1.ps
print -dps exo24_f1.ps
```

```
echantillon = -3:0.1:3
v = f2(echantillon)
plot(echantillon,v)
print -dps exo24_f2.ps

echantillon = 10^(-2):0.1:pi
v = f3(echantillon)
plot(echantillon,v)
print -dps exo24_f3.ps

# Notez la différence avec ce zoom sur la partie 0->0.5
# avec un pas de 0.001 au lieu de 0.1

echantillon = 10^(-2):0.001:0.4
v = f3(echantillon)
plot(echantillon,v)
print -dps exo24_f3_zoom.ps

# Il y a une oscillation infinie qu'on devine maintenant
# mais qui était presque invisible sur le graphique avec un pas de 0.1.
```

Correction of the exercise 10

```
function y = f(fric)
   Re = 10^4
   y = sqrt(fric).*(0.4 +1.74.*log(Re.*sqrt(fric) ) )
end


debut = 0
fin = 0.05
pas = (fin-debut)/1000
echantillon = debut+pas:pas:fin
   % On ne commence pas à zéro parce que le log n'y a pas de sens.

valeurs = f(echantillon)

plot(echantillon,valeurs)
print -dps exo2-5.ps
```

Correction of the exercise 11

Un polynôme est donné par un vecteur qui contient les coefficients. Ainsi, le polynôme $x^2 - 2x + 3$ sera représenté par $p = [1, -2, 3]$. Attention : dans la tête de Matlab, ce p reste un vecteur. Lui demander de faire `plot(p)` ne va pas du tout lui faire tracer le graphe du polynôme.

En ce qui concerne le tracé, il se fait que Matlab place automatiquement les nombres complexes dans le plan complexe. Ainsi, si z est un nombre complexe, `plot(z)` affichera le point du plan qui correspond à z.

```
p = [1,0,0,0,0,0,0,1,1]
racines = roots(p)

plot(racines,'*')   % Le * est pour que les point soient des petites étoiles.
print -dps exo31.ps
```

Correction of the exercise 12

```
% Ici, nous avons des données expérimentales, et puis une courbe théorique.
% La stratégie sera la suivante :
% 1. Nous mettons les données expérimentales dans les vecteurs x et y.
% 2. Nous calculeront la courbe théorique avec un polyfit.
% 3. Pour tracer la courbe théorique, nous allons procéder comme d'habitude.
%     Nous commencerons par créer un vecteur d'abcisse X
%     et puis nous calculerons le vecteur d'ordonnées correspondant Y.

x = [290,300,310,320,330]
y = [1.15053,1.14950,1.1478,1.14656,1.14527]

% Pour trouver le polynôme de degré 3 qui passe le mieux par les points
% donnés par les vecteurs x et y, il faut utiliser la commande polyfit.
p = polyfit(x,y,3)
% 5.1667e-08  -4.8093e-05   1.4770e-02  -3.4821e-01

% Juste pour s'amuser à voir à quoi ressemble le polynôme, écrivons-le :
polyout(p,"T")

X = 250:350
Y = polyval(p,X)
% polyval est la commande pour évaluer un polynôme en un point.
% Ici, on l'évalue en tous les points d'abscisse qu'on veut tracer.
```

```
plot(X,Y,':',x,y,'o')
print -dps exo32.ps
% Noter que je trace de 250 à 350 de façon très arbitraire.
% Rien dans les données expérimentales ne montre la croissance de la
% fonction entre 250 et 280, ni celle entre 340 et 350.
% D'un point de vue scientifique, la méfiance est de rigueur lorsqu'on
% extrapole des données en-dehors du domaine des expériences.

% Pour évaluer la valeur de p au point 316 :
polyval(p,316)   %1.1470
```

Correction of the exercise 13

Dans cet exercice, la subtilité est d'utiliser les logarithmes des données expérimentales, et non les données elles-mêmes. Nous commençons donc par créer les vecteurs `lnx` et `lny` qui contiennent les logarithmes des données expérimentales.

```
x = [21,236,384,2.6*10^3,1.8*10^4,3.9*10^4,5.8*10^5]
y = [13,3.7,4.4,1.7,0.92,0.58,0.15]

lnx = log(x)
lny = log(y)

% Une droite, est un polynôme de degré 1.
droite = polyfit(lnx,lny,1)
% -0.42109   3.84651

abcisses = [2,15]
ordonnees = polyval(droite,abcisses)

plot(abcisses,ordonnees,':',lnx,lny,'o')
print -dps exo33.ps
```

Correction of the exercise 14

```
x = [0.0005,0.001,0.005,0.01,0.02,0.05]
y = [422.74,421.36,415.80,412.00,407.24,399.09]

p = polyfit(sqrt(x),y,1) %-118.00   424.64
polyout(p,"x")
```

```
abcisses = 0.0005:0.0001:0.05
ordonnees = p(1)*sqrt(abcisses)+p(2)

plot(abcisses,ordonnees,':',x,y,'o')
print -dps exo34.ps
```

Correction of the exercise 15

```
function y=f(x)
   y = (exp(x)*x.^4)/(exp(x)-1).^2;
endfunction

% La fonction suivante donne la valeur de l'intégrale
% de la fonction demandée entre 0 et xm.
function y=Integrale(xm)
y = quad('f',0,xm);
endfunction

R = 8.314;
xm = 313/300;

reponse = (9*R/xm^3)*Integrale(xm)   % 23.636
```

Notez que les fonctions qui sont destinées à être intégrées doivent accepter des entrées vectorielles. D'où le fait qu'il ne faille pas oublier de mettre des points un peu partout.

Correction of the exercise 16

Le point à comprendre est que `fzero` ne permet que de résoudre $f(x) = 0$. Or ici nous avons besoin de $f(x) = 0.5$. C'est pour cela que nous définissons la fonction intermédiaire `Dawsonbis` qui vaut $f(x) - 0.5$.

```
function y=Integrande(t)
y = exp(t.^2);
end

% La fonction qui à x fait correspondre l'intégrale de f entre 0 et x
function y=Integrale(x)
```

```
y=quad('Integrande',0,x);
end

% La fonction Dawson de l'énoncé
function y=Dawson(x)
y=exp(-x.^2)*Integrale(x);
end

reponseA = Dawson(1)   % 0.53808

function y=Dawsonbis(x)
y=Dawson(x)-0.5;
end

reponseB = fzero('Dawsonbis',0.7) % 0.66607
```

Correction of the exercise 17

Nous suivons le plan suivant

- Nous commençons par définir la fonction qui donne le problème de Cauchy, c'est à dire $f(x, y) = 1 + y^2$. Notez qu'il faut bien définir une fonction de deux variables x et y, même si on n'en utilise une seule.
- Ensuite, nous résolvons le système en mettant la solution dans les vecteurs `x` et `y`.
  Notez que j'ai l'impression que pour ode45, la syntaxe est notablement différente entre Octave et Matlab.
- La commande `print -dps exo43.ps` sert à enregistrer le graphique dans le fichier `exo43.ps`.

```
function retour=Cauchy(x,y)
retour = 1+y.^2;
end

[x,y] = ode45(@Cauchy,[0 1.5],0)

X = 0:0.001:1.5;
Y = tan(X);

plot(x,y,'o',X,Y)
print -dps exo43.ps
```

Correction of the exercise 18

Par définition, si on connait un point (x_0, y_0) du graphe de la solution au problème de Cauchy, la valeur de la dérivée en ce point est donnée par $f'(x_0) = x_0^2 + y_0^2/4$. Nous pouvons donc facilement calculer f' sur les abscisses `X` où Matlab a fournit la solution parce que nous y connaissons le `y` correspondant.

De plus, la formule qui donne $f'(x_0)$ en fonction de x_0 et y_0 est précisément celle qui définit le problème de Cauchy. Pas besoin de la retaper.

```
function retour=Cauchy(x,y)
retour = x.^2+(y.^2)/4;
end

[X,Y] = ode45(@Cauchy,[0 1.5],0.2);

z = Cauchy(X,Y)

plot(X,Y,X,z,'o')
print -dps exo44.ps
```

Correction of the exercise 19

<++>

```
% Cette fonction donne x_{n+1} en fonction de x_n.
function y = recurrence(x)
   y=sqrt(2+x);
end

n = 12
x = 0;

% On va appliquer n fois la récurrence
for i = 1:n
   x = recurrence(x);
endfor

x

% Pour faire une fonction qui calcule le terme n, il suffit de faire
% une fonction qui contient n fois la récurrence.
function y = xn(n)
   x = 0;
```

```
   for i = 1:n
      x = recurrence(x);
   endfor
   y = x;
end

% Pour calculer le terme numéro 100 de la suite :
TermeCent = xn(100)
```

Correction of the exercise 20

<++>

Correction of the exercise 21

<++>

Correction of the exercise 22

```
% La fonction suivante retourne le plus grand en valeur absolue de a et b.
function y=maxvalabs(a,b)
   if abs(a)>abs(b)
      y = a;
   else
      y = b;
   end
end

% deux vecteurs de tests.
x = [1,4,8,-4,-4];
y = [-2,3,7,-5,5];

% On crée le vecteur z qui a la même longueur que x.
% Peu importe ce qu'il y a dedans parce qu'on va le redéfinir juste après.
z = 1:length(x)

for i = 1:length(x)
   z(i) = maxvalabs(x(i),y(i));
endfor

z
```

Correction of the exercise 23

Quelque éléments de technique

– Pour définir la fonction, vu que le test d'égalité ne semble pas existe dans Matlab, il ne faut pas dire que la fonction vaut $x^2 - 4x$ si $\ln(x) - x + 2 < 0$ (strict) et $\Big(\ln(x) + 2\Big)^2$ sinon.
– Pour tracer, la procédure habituelle serait de faire $Y = f(X)$ après avoir définit un vecteur d'abscisses X. Hélas, f ne s'applique pas bien à un vecteur (à cause du fait que x arrive dans un `if`). Il faut donc faire à la main le passage de composante à composante. C'est à cela que sert la boucle `for`.

```
function y=f(x)
   if log(x)-x+2 < 0
      y = x.^2-4*x;
   else
      y = (log(x)+2).^2-4*x;
   endif
endfunction

X = 1:0.1:10;

Y = 1:length(X);
for i=1:length(X)
   Y(i)=f(X(i));
endfor

plot(X,Y)
print -dps exo55.ps
```

Correction of the exercise 24

<++>

Correction of the exercise 25

```
function y=f(x)
y=(1+x).*exp(-x.^2+2*x.*cos(x))-(1+x.^4).^2.*sin(x)
end

X = -3:0.1:3
Y = f(X)
plot(X,Y)


print -dps exo0001.ps
```

Correction of the exercise 26

```
u = 1:100
v = 1./sin(u)

reponse = sum(v)      %-60.588
```

Correction of the exercise 27

```
u = 1:100
v = 1./u.^2

reponse = sum(v)      % 1.635
```

Correction of the exercise 28

```
u = 1:100
v = 2.^u

reponse = sum(v)      % 2.5353e+30
```

Correction of the exercise 29

```
p = [1 0 0 0 0 -5 0 2]

X = -2:0.1:2
Y = polyval(p,X)

plot(X,Y)
print -dps exo0005.ps
```

Correction of the exercise 30

```
function y=f(x)
y=cos(x)-x
endfunction

fzero('f',0)   % 0.73909
```

Correction of the exercise 31

<++>

Correction of the exercise 32

<++>

Correction of the exercise 33

<++>

Correction of the exercise 34

<++>

Correction of the exercise 35

<++>

Correction of the exercise 36

<++>

Correction of the exercise 37

```
function y=intergrande(t)
y=cos(sin(t));
end

function y=f(x)
y=quad('intergrande',0,x)-1/4;
end

reponse = fzero('f',0.3)      % 0.25265

X = 0:0.1:5;
Y = f(X);
plot(X,Y,'o')
print -dps exo0013.ps
```

Correction of the exercise 38

```
function y=f(t)
y=exp(cos(t)).*sin(t-1).^2+2*sqrt(t.^3+7*t)
end

X = 0:0.1:10
```

```
Y = f(X)
plot(X,Y)
print -dps exo3novQ2.ps
```

Correction of the exercise 39

```
function z=f(x,y)
z=-(x.^2+y.^2)
end

[x,y] = ode45(@f,[0,2],1)
plot(x,y)

print -dps exo3novQ3.ps
```

Correction of the exercise 40

```
function y=l(lz,v)
c=3*10^8
y=lz*sqrt(1-(v.^2/c^2))
end
c=3*10^8
lz = 1.3
X = 0:10000:c
Y = l(lz,X)
plot(X,Y)
print -dps exo3novQ4.ps
```

Correction of the exercise 41

```
annee =    [1997 1998 1999 2000 2001 2002 2003 2004 2005 2006 2007]
cons =   [72231 73588 72377 74916 74847 74478 77031 80326 81255 81659 81533]

consommation = cons*365/(10^6)
p = polyfit(annee,consommation,1)

long_terme = 1997:2050
theorie = polyval(p,long_terme)
```

```
plot(annee,consommation,'o',long_terme,theorie)
print -dps petrole.ps

% Consomation extrapolée année par année :
extracons = polyval(p,2009:2050)
% Consomation en 2050 :
polyval(p,2050)

% Somme de notre consommation entre 2009 et 2050 :
sum(extracons)
```

Les assiettes gyros spéciales avec frites se trouvent uniquement à Louvain la Neuve au Coup de théâtre situé sur la place de l'université, à gauche de l'entrée du bâtiment de dons de sang.

Correction of the exercise 42

<++>

Correction of the exercise 43

<++>

Correction of the exercise 44

<++>

Correction of the exercise 45

```
function y=f1(x)
y=sin(x.^2)
endfunction

function y=f2(x)
y=exp(x)/4
endfunction

function y=f(x)
y=f1(x)-f2(x)
endfunction

X = 0:0.05:2
Y1 = f1(X)
Y2 = f2(X)
```

```
t1 = 0.7
t2 = 1.3

r1 = fzero('f',t1)
r2 = fzero('f',t2)

r1      %0.74452
r2      %1.3525

plot(X,Y1,X,Y2,r1,f1(r1),'o',r2,f1(r2),'o')
print -dps exo2-1.ps
```

Correction of the exercise 46
<++>

Correction of the exercise 47
<++>

Correction of the exercise 48
<++>

Correction of the exercise 49
<++>

Correction of the exercise 50
<++>

Correction of the exercise 51
<++>

Correction of the exercise 52
<++>

Correction of the exercise 53
<++>

Correction of the exercise 54
<++>

Correction of the exercise 55
<++>

Correction of the exercise 56

```
A = [3,7,0,5;6,3,2,-2;3,0,1,4;0,6,5,-7]
u= [3,-2,9,1]
x = inv(A)*u'

%  -0.58003
%  -0.61881
%   3.48267
%   1.81436
```

Correction of the exercise 57
<++>

Correction of the exercise 58
<++>

Correction of the exercise 59
<++>

Correction of the exercise 60
<++>

Correction of the exercise 61
<++>

Correction of the exercise 62
<++>

Correction of the exercise 63
<++>

Correction of the exercise 64
<++>

Correction of the exercise 65
<++>

Correction of the exercise 66
<++>

Correction of the exercise 67
<++>

Correction of the exercise 68

<++>

Correction of the exercise 69

<++>

Correction of the exercise 70

```
function z=cauchy(x,y)
z= -sin(x)*y
end

function y=exact(x)
y=exp(cos(x))
end

e = exp(1)
[x,y]=ode45(@cauchy,[0,2],e)

X = 0:0.1:2
Y = exact(X)
plot(x,y,'o',X,Y)
print -dps exo3novQ5.ps
```

Correction of the exercise 71

<++>

Correction of the exercise 72

<++>

Correction of the exercise 73

```
function y=f(x)
a=3
y=x.*exp(-x/a)
endfunction

function y=fp(x)
y=-(1/3)*x.*exp(-x/3)+exp(-x/3)
endfunction
```

```
X=-2:0.1:10
Y=f(X)

xmax=fzero('fp',2)
ymax=f(xmax)
plot(X,Y,xmax,ymax,'o')

print -dps G21-1.ps
```

Correction of the exercise 74

```
v=5:1000
w=sin(v)
x=1./w
sum(x)
```

Correction of the exercise 75

```
x=[1,2,3,4]
y=[82,96,98,90]

P=polyfit(x,y,3)
polyval(P,5)
```

Correction of the exercise 76

Correction of the exercise 77

```
function y=f(x)
y=4.144*(10^(14))./x.^2
endfunction

function y=W(x)
R=6500000
y=quad(@f,R,R+x)
endfunction

h=10000
```

```
X=0:100:10000
Y=1:length(X)
for i=1:length(X)
   Y(i)=W(X(i))
endfor
plot(X,Y)
print -dps G22-2.ps
```

Correction of the exercise 78

```
v=30:90
w=-v./10
x=exp(w)
sum(x)
```

Correction of the exercise 79

```
u = 4:250
v = 1./sqrt(u)
reponse = sum(v)      % 27.910
```

Correction of the exercise 80

```
A = [2,3,-1;0,1,1;-2,1,1]
u = [20,4,0]

deter = det(A)
v = A\u'
```

Correction of the exercise 81

```
function retour=phi(t)
retour = sqrt(t)*cos(t);
end
```

```
function retour = f(x)
retour = x.^2*quad('phi',0,x);
end

f(1)   #0.53120
X=0:0.1:3
Y=[]
for   i = 1:length(X)
   Y(i)=f(X(i))   ;
end

plot(X,Y)
print -dps G31-3.ps
```

Correction of the exercise 82

```
function retour=Cauchy(x,y)
retour = y/2 + 2*exp(x/2).*cos(2*x)
end

function retour=solution(x)
retour = sin(2*x).*exp(x/2)
end

[x,y]=ode45(@Cauchy,[0,4],0)

X = 0:0.1:4
Y=solution(X)
plot(x,y,X,Y)
print -dps G32-1.ps
```

Correction of the exercise 83

```
u=1:100;
v=2.^(cos(2*u));
sum(v)   % 111.89

function retour=s(N)
u=1:N;
v=2.^(cos(2*u));
```

```
retour=sum(v);
end

for i=100:200
s(i)
end
% Le dernier est 223.88
```

Pour prouver que la série ne converge pas, montrons que la suite des $2^{\cos(n)}$ ne tend pas vers zéro. Pour cela, considérons la suite x_i des développements décimaux de 2π à i décimales, puis prenons $y_i = x_i \cdot 10^i$. Cela est juste la suite 6, 6.2, 6.28, ...

Vu que le cosinus est une fonction croissante entre 6 et 2π, nous avons $\cos(y_i) \geq \cos(6)$, et donc $2^{\cos(y_i)} \geq 2^{\cos(6)}$. Cela fournit une sous suite des $2^{\cos(n)}$ qui ne tend pas vers zéro.

Correction of the exercise 84

```
num = [1,2,4,5,7]
tailles = [130,120,123,114,131]

P=polyfit(num,tailles,3)
% P =   1.1404e-01  -2.5063e-02  -5.9937e+00   1.3451e+02

polyval(P,3)   % 119.39
polyval(P,6)   % 122.28
```