INFO-F-310 Algorithmique III:
TP1 - solutions. Recherche opérationnelle et applications

Bernard Fortz, Nikita Veshchikov

Exercice 1

L'entreprise Mobilier & co produit des bureaux et des chaises. La production d'un bureau requiert 4 unités de bois, et celle d'une chaise 3. La vente d'un bureau rapporte 40E, alors que celle d'une chaise rapporte 25E. On suppose que tout ce qui est produit est vendu. Des restrictions marketing imposent que le nombre de chaises produites soit au moins le double du nombre de bureaux produits. Si on ne dispose que de 20 unités de bois, formulez un programme linéaire qui maximise le profit de Mobilier & co. Résolvez le problème graphiquement.

Solution :

Programme linéaire

$$
\begin{array}{rcl}
b & : & \text{nombre de bureaux} \\
c & : & \text{nombre de chaises} \\
max & : & 40b + 25c
\end{array}
$$

$$
\left\{
\begin{array}{lcll}
4b + 3c & \leq & 20 & \text{(disp - bois)} \\
2b & \leq & c & \text{(marketing)} \\
b, c & \in & \mathbb{N} &
\end{array}
\right.
$$

Simplex

En ajoutant des variables d'écart :

$$
\begin{array}{llllll}
4b & +3c & +s_1 & & = & 20 \\
2b & -c & & +s_2 & = & 0 \\
\multicolumn{6}{l}{max : 40b + 25c}
\end{array}
$$

Solution admissible:

$$
\begin{array}{rcl}
s_1 & = & 20 - 4b - 3c \\
s_2 & = & 0 - 2b + c \\
z & = & 0 + 40b + 25c
\end{array}
$$

Iteration1:

$$
\begin{array}{rcl}
s_1 & = & 20 - 5c + 2s_2 \\
b & = & 0 + 0{,}5c - 0{,}5s_2 \\
z & = & 0 + 45c - 20s_2
\end{array}
$$

Iteration2:

$$\begin{aligned} c &= 4 - 0{,}2s_1 + 0{,}4s_2 \\ b &= 2 - 0{,}1s_1 - 0{,}3s_2 \\ z &= 180 - 9s_1 - 2s_2 \end{aligned}$$

$max \wedge \forall c_i : c_i \leq 0 \Rightarrow$ solution optimale ($-9 \leq 0, -2 \leq 0$ et on cherche un maximum).
Solution: $b = 2$, $c = 4$. **Max :** 180.

Exercice 2

Le fermier Robert possède 45 hectares. Il souhaite concentrer son agriculture sur le blé et le maïs. Chaque hectare de blé rapporte 200E de profit, alors que chaque hectare de maïs lui rapporte 300E. Le nombre de travailleurs ainsi que la quantité d'engrais nécessaires à la production varient en fonction du type de plantation, comme cela est indiqué sur la table 1. 100 travailleurs et 120 tonnes d'engrais sont disponibles. Formulez un programme linéaire qui permet à Robert de maximiser son profit.

Table 1		
	Blé	Maïs
Travailleurs	3	2
Tonnes d'engrais	2	4

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{aligned} b &: \text{nombre de hectares de blé} \\ m &: \text{nombre de hectares de maïs} \\ max &: 200b + 300m \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b + m & \leq & 45 & \text{(hectares)} \\ 3b + 2m & \leq & 100 & \text{(travailleurs)} \\ 2b + 4m & \leq & 120 & \text{(engrais)} \\ b, m & \in & \mathbb{N} & \end{cases}$$

Simplex

Solution admissible:

$$\begin{aligned} s_1 &= 45 - b - m \\ s_2 &= 100 - 3b - 2m \\ s_3 &= 120 - 2b - 4m \\ z &= 0 + 200b + 300m \end{aligned}$$

Iteration1:

$$\begin{aligned} s_1 &= 15 - 0{,}5b + 0{,}25s_3 \\ s_2 &= 40 - 2b + 0{,}5s_3 \\ m &= 30 - 0{,}5b - 0{,}25s_3 \\ z &= 9000 + 50b - 75s_3 \end{aligned}$$

Iteration2:

$$\begin{aligned} s_1 &= 5 + 0{,}25s_2 + 0{,}125s_3 \\ b &= 20 - 0{,}5s_2 + 0{,}25s_3 \\ m &= 20 + 0{,}25s_2 - 0{,}375s_3 \\ z &= 10000 - 25s_2 - 62{,}5s_3 \end{aligned}$$

Iteration3:

$$\begin{array}{rcl} s_1 & = & 5 + 0{,}25s_2 + 0{,}125s_3 \\ b & = & 20 - 0{,}5s_2 + 0{,}25s_3 \\ m & = & 20 + 0{,}25s_2 - 0{,}375s_3 \\ z & = & 10000 - 25s_2 - 62{,}5s_3 \end{array}$$

Solution: $b = 20$, $m = 20$. **Max :** 10000.

Exercice 3

Le fermier Georges possède un élevage de chevaux qui ont besoin chaque jour de 800 kg de nourriture. Cette nourriture spéciale consiste en un mélange de blé et d'avoine dont les compositions en protéines et fibres alimentaires sont indiquées sur la table 2. Ces compositions sont des quantités (en kg) par kg de blé / avoine. Le coût d'achat du blé s'élève à 0,3E par kg, alors que celui de l'avoine s'élève à 0,9E par kg. Pour que ses chevaux soient en pleine forme, Georges souhaiterait que leur alimentation soit composée d'au moins 30 % de protéines et d'au plus 5 % de fibres. Aidez Georges à composer le mélange au moindre coût en formulant le programme linéaire et en résolvant le problème graphiquement.

Table 2		
	Protéine	Fibre
Blé	0,09	0,02
Avoine	0,6	0,06

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{array}{rcl} a & : & \text{nombre de kg d'avoine} \\ b & : & \text{nombre de kg de blé} \\ min & : & 0{,}3b + 0{,}9b \end{array}$$

$$\begin{cases} a + b & \geq & 800 & \text{(kg total)} \\ 0{,}6a + 0{,}09b & \geq & 0{,}3 * (a + b) & \text{(protéines)} \\ 0{,}06a + 0{,}02b & \leq & 0{,}05 * (a + b) & \text{(fibres)} \\ a, b & \geq & 0 & \end{cases}$$

Ajout des variables d'écart:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, z = 0{,}9a + 0{,}3b \\ \text{s.c. } a + b - s_1 = 800 \\ -3a + 2{,}1b + s_2 = 0 \\ a - 3b + s_3 = 0 \\ a, b, s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex

Pour obtenir une solution de base de départ, on ajoute une variable artificielle t dans la première contrainte, et on commence par minimiser t pour l'éliminer:

$$\begin{aligned}\text{mín}\, T = t = 800 - a - b + s_1 \\ \text{s.c. } a + b - s_1 + t = 800 \\ -3a + 2{,}1b + s_2 = 0 \\ a - 3b + s_3 = 0 \\ a, b, s_1, s_2, s_3, t \geq 0\end{aligned}$$

- Phase 1:

	T	z	a	b	s_1	s_2	s_3	t	
T	-1	0	-1	-1	1	0	0	0	-800
z	0	-1	0.9	0.3	0	0	0	0	0
t	0	0	1	1	-1	0	0	1	800
s_2	0	0	-3	2.1	0	1	0	0	0
s_3	0	0	1	-3	0	0	1	0	0

Itération 1:

	T	z	a	b	s_1	s_2	s_3	t	
T	-1	0	0	-4	1	0	1	0	-800
z	0	-1	0	3	0	0	-0.9	0	0
t	0	0	0	4	-1	0	-1	1	800
s_2	0	0	0	-6.9	0	1	3	0	0
a	0	0	1	-3	0	0	1	0	0

Itération 2:

	T	z	a	b	s_1	s_2	s_3	t	
T	-1	0	0	0	0	0	0	-1	0
z	0	-1	0	0	0.75	0	-0.15	-0.25	-600
b	0	0	0	1	-0.25	0	-0.25	0.25	200
s_2	0	0	0	0	-1.725	1	1.275	1.725	1380
a	0	0	1	0	-0.75	0	0.25	0.75	600

t étant sorti de la base, on peut passer à la phase 2.

- Phase 2:

Itération 1:

	z	a	b	s_1	s_2	s_3	
z	-1	0	0	0.54705882	0.11764706	0	-437.64707
b	0	0	1	-0.5882353	0.19607843	0	470.58823
s_3	0	0	0	-1.3529412	0.78431373	1	1082.3529
a	0	1	0	-0.4117647	-0.19607843	0	329.41178

Solution: $a = 329{,}412$, $b = 470{,}588$. **Min :** 437,647.

Exercice 4

Le directeur marketing de la compagnie Bidule cherche à déterminer le mix de produit optimal. Son premier produit rapporte 1E par unité vendue. Le second est un nouveau produit star qui rapporte 2E par unité vendue. Le marché est restreint à 40 unités par semaine. De plus, pour certaines raisons internes, le directeur marketing souhaite que les ventes du premier produit soit toujours supérieures à celles du second. Aidez le directeur marketing à résoudre ce casse-tête, et résolvez graphiquement.

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{array}{rcl} p_i & : & \text{unités de produit i} \\ max & : & p_1 + 2p_2 \end{array}$$

$$\begin{cases} p_1 + p_2 & \leq & 40 & \text{(total)} \\ p_1 & \geq & p_2 & \text{(marketing)} \\ p_1, p_2 & \in & \mathbb{N} \end{cases}$$

Simplex

Solution: $p_1 = 20$, $p_2 = 20$. **Min :** 60.

Exercice 5

Grand-Mère prépare des confitures et des chocos pour le goûter de ses 12 petits-enfants. Elle souhaite les préparer à moindre coût en sachant qu'une confiture lui coûte 3 F, alors qu'un choco lui coûte 2 F. Malheureusement, elle ne dispose que de deux paquets de sucre. Chaque choco nécessite un paquet, alors que chaque confiture en nécessite deux. De plus, elle sait qu'une confiture permet à 3 petits-enfants de goûter, alors qu'un choco sert au goûter de 4 enfants. Aidez Grand-Mère à préparer le goûter de ses petits-enfants.

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{array}{rcl} co & : & \text{nombre de confitures} \\ ch & : & \text{nombre de chocos} \\ min & : & 3co + 2ch \end{array}$$

$$\begin{cases} 2co + ch & \leq & 2 & \text{(sucre)} \\ 3co + 4ch & \geq & 12 & \text{(enfants)} \end{cases}$$

Ajout des variables d'écart:

$$\begin{aligned} \min z &= 3co + 2ch \\ \text{s.c. } & 2co + ch + s_1 = 2 \\ & 3co + 4ch - s2 = 12 \\ & co, ch, s_1, s_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Simplex

Pour obtenir une solution de base de départ, on ajoute une variable artificielle r dans la deuxième contrainte, et on commence par minimiser r pour l'éliminer:

$$\begin{aligned} \text{mín}\, T = t = 12 - 3co - 4ch \\ \text{s.c. } 2co + ch + s_1 = 2 \\ 3co + 4ch - s2 + t = 12 \\ co, ch, s_1, s_2, t \geq 0 \end{aligned}$$

La résolution de ce programme mène à une solution optimale $t = 4$, le problème de départ est donc **impossible**.

Solution: pas de solution.

Exercice 6

Le constructeur de voitures Minerva produit des voitures dans ses usines de Cologne et de Lille. A Cologne, on peut produire au plus 120 voitures par semaine et au plus 250 à Lille. La compagnie veut transporter les voitures jusqu'à ses sièges de vente situés à Paris et à Bruxelles. Le siège de Bruxelles doit avoir au moins 140 voitures par semaine ; celui de Paris au moins 210. Le coût de transport par voiture entre les centres de production et les sièges de vente est donné par le tableau 3. La compagnie cherche à minimiser les coûts de transport des voitures. Formulez le problème.

Table 3

	Cologne	Lille
Bruxelles	2500F	2200F
Paris	3500F	3000F

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{aligned} I_J &: \text{ nombre de voitures à transporter de I vers J} \\ min &: \ 2500C_B + 3500C_P + 2200L_B + 3000L_P \end{aligned}$$

$$\begin{cases} C_B + C_P & \leq & 120 & \text{(voitures à Cologne)} \\ L_B + L_P & \leq & 250 & \text{(voitures à Lille)} \\ C_B + L_B & \geq & 140 & \text{(besoin de Bruxelles)} \\ C_P + L_B & \geq & 210 & \text{(besoin de Paris)} \end{cases}$$

Simplex

Solution: $C_B = 100$, $C_P = 0$, $L_B = 40$, $L_P = 210$. **Min :** 968000.

Exercice 7

Un fabriquant de poudre à lessiver décide de consacrer une part de son budget à la publicité sur radio et TV, mais il a plusieurs exigences. D'une part, il estime que, pour que cette publicité soit efficace, elle doit durer au moins 30 secondes à la radio et au moins 3 minutes à la TV ; ensuite, il veut que le temps de cette publicité TV soit au moins le double de celui de la publicité à la radio ; enfin, il ne veut pas consacrer plus de 400 000 F à ce budget. La publicité à la radio revient à 20 000 F la minute et la publicité à la TV à 80 000 F la minute. Formulez le programme linéaire pour aider le fabriquant à maximiser le temps total de publicité.

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{array}{rcl} t & : & \text{nombre de sec de pub à la TV} \\ r & : & \text{nombre de sec de pub à la radio} \\ max & : & r+t \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{lcll} r & \geq & 30 & \text{(radio)} \\ t & \geq & 3*60 & \text{(TV)} \\ 2r & \leq & t & \text{(double)} \\ \frac{20000r}{60}+\frac{80000t}{60} & \leq & 400000 & \text{(budget)} \end{array}\right.$$

Simplex

Solution: $r = 133{,}333$, $t = 266{,}667$. **Max :** 400.

Exercice 8

Hawaii Sugar Company produit du sucre brun, du sucre blanc, du sucre en poudre et de la mélasse à partir de sirop de sucre de cane. La compagnie achète 4000 tonnes de sirop par semaine et s'est engagée contractuellement à livrer au moins 25 tonnes de chaque type de sucre hebdomadairement. Le processus de production démarre par la fabrication du sucre brun et de la mélasse à partir du sirop. Une tonne de sirop permet d'obtenir .3 tonnes de sucre brun et .1 tonnes de mélasse. Ensuite, le sucre blanc est produit en traitant le sucre brun. Il faut 1 tonne de sucre brun pour produire .8 tonnes de sucre blanc. Enfin, le sucre en poudre est produit à partir du sucre blanc par un processus de broyage spécial qui a une efficacité de conversion de 95 % (1 tonne de sucre blanc produit .95 tonnes de sucre en poudre). Les profits par tonne du sucre brun, sucre balnc, sucre en poudre et mélasse sont de 150, 200, 235 et 35 respectivement. Formulez le problème comme un problème linéaire.

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 9

La banque d'investissement Gold dispose actuellement de 100 000E qu'elle souhaite placer sur 5 ans. Au total, elle a quatre opportunités d'investissement démarrant cette année ou l'année prochaine (projet 3). La table 4 reprend les montants investis (chiffres négatifs) et les bénéfices générés (chiffres positifs). Par exemple, pour le projet 1, 1E investi en année 1 génère 0,5E en année 2, 0,3E en année 3, 1,8E en année 4 et 1,2E en année 5. En plus de ces quatre opportunités, la banque d'investissement Gold peut placer de l'argent sur un compte bancaire qui génère 6,5 % d'intérêt annuel. Formulez un programme linéaire qui permette à la banque d'investissement de maximiser ses revenus au terme de la 5ème année. Remarquez que ce qui peut être investi une année ne peut pas excéder ce qui est disponible (argent non placé + intérêts des investissements antérieurs).

Table 4					
Projet	Année 1	Année 2	Année 3	Année 4	Année 5
1	-1	0,5	0,3	1,8	1,2
2	-1	0,6	0,2	1,5	1,3
3	0	-1	0,8	1,9	0,8
4	-1	0,4	0,6	1,8	0,95

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 10

L'entreprise WALLGOSSBIER est une entreprise de transport aérien de fret. Elle dispose d'une flotte d'avions cargos identiques. Chaque avion possède trois compartiments (avant, milieu, arrière) pour transporter sa cargaison. La capacité de chaque compartiment est limitée par le poids et par le volume transporté, selon le tableau 5. On ne peut transporter dans chaque compartiment ni plus que le volume maximal autorisé, ni plus que le poids maximal autorisé.

Table 5		
Compartiment	Poids maximal par compartiment (tonnes)	Volume maximal par compartiment (pieds cube)
Avant	12	7000
Milieu	18	9000
Arrière	10	5000

De plus, dans un avion chargé, le poids réellement utilisé dans chaque compartiment doit représenter une même proportion du poids maximal autorisé pour le compartiment. Cette proportion n'est pas imposée, mais elle doit être la même pour chaque compartiment. Cette contrainte est imposée afin d'assurer un bon équilibrage de l'avion.

Un avion doit être chargé ce matin, et on dispose pour sa destination des quatre cargaisons disponibles présentées à la table 6.

Table 6			
Cargaison	Poids (tonnes)	Volume (pieds cubes par tonne)	Profit (E par tonne)
C1	20	500	280
C2	16	700	360
C3	25	600	320
C4	13	400	250

Chaque cargaison peut être chargée en tout ou en partie dans l'avion (n'importe quelle fraction de chaque cargaison est acceptable).

Formulez un problème de programmation linéaire qui détermine le plan de chargement de l'avion (combien charger de chaque cargaison, et où placer ces charges dans l'avion) qui respecte les contraintes de chargement et maximise le profit du vol à réaliser.

Solution :

Programme linéaire

$$\begin{array}{rcl} c_{i,j} & : & \text{nombre de cargaison i} \in \{1,2,3,4\} \text{ chargée dans compartiment j} \in \{\text{av,mi,ar}\} \\ max & : & \sum_j 280c_{1,j} + 360c_{2,j} + 320c_{3,j} + 250c_{4,j} \end{array}$$

$$\begin{cases} c_1 & \leq & 20 & \text{(dispo - c1)} \\ c_2 & \leq & 16 & \text{(dispo - c2)} \\ c_3 & \leq & 25 & \text{(dispo - c3)} \\ c_4 & \leq & 13 & \text{(dispo - c4)} \\ c_{1,av} + c_{2,av} + c_{3,av} + c_{4,av} & \leq & 12 & \text{(poid : avant)} \\ c_{1,mi} + c_{2,mi} + c_{3,mi} + c_{4,mi} & \leq & 18 & \text{(poid : milieu)} \\ c_{1,ar} + c_{2,ar} + c_{3,ar} + c_{4,ar} & \leq & 10 & \text{(poid : arrière)} \\ 500c_{1,av} + 700c_{2,av} + 600c_{3,av} + 400c_{4,av} & \leq & 7000 & \text{(volume : avant)} \\ 500c_{1,mi} + 700c_{2,mi} + 600c_{3,mi} + 400c_{4,mi} & \leq & 9000 & \text{(volume : milieu)} \\ 500c_{1,ar} + 700c_{2,ar} + 600c_{3,ar} + 400c_{4,ar} & \leq & 5000 & \text{(volume : arrière)} \\ \frac{c_{1,av} + c_{2,av} + c_{3,av} + c_{4,av}}{12} & = & \frac{c_{1,mi} + c_{2,mi} + c_{3,mi} + c_{4,mi}}{18} & \text{(proportion - poid)} \\ \frac{c_{1,ar} + c_{2,ar} + c_{3,ar} + c_{4,ar}}{10} & = & \frac{c_{1,mi} + c_{2,mi} + c_{3,mi} + c_{4,mi}}{18} & \text{(proportion - poid)} \end{cases}$$

Simplex

Exercice 11

La compagnie de location de voitures RACAR fait suivre un programme de formation à ses nouveaux agents. Ce programme est suivi par chaque nouvel agent et dure un mois. Un nouveau stage de formation peut débuter le premier jour ouvrable de chaque mois, et se termine à la fin du mois. Les professeurs dans ce programme de formation sont des agents expérimentés de RACAR. Pour assurer la qualité de la formartion, il faux un taux d'encadrement suffisant d'au moins 1 instructeur (agent expérimenté) pour 15 étudiants (nouveaux agents).

Le besoin, exprimé en nombre d'agents aptes à travailler pour effectuer la location des véhicules a été estimé pour les 6 prochains mois et est fourni dans le tableau ci-dessous. Ce tableau ne comprend pas les agents qui servent d'instructeurs dans les stages de formation. Chaque mois, RACAR doit donc affecter à la location des véhicules un nombre d'agents qui est au moins égal au nombre mentionné dans la table 7.

Table 7

Mois	Besoin (agents aptes)
Janvier	135
Février	125
Mars	150
Avril	170
Mai	160
Juin	180

Nous sommes actuellement le premier janvier, et RACAR dispose de 145 agents aptes à travailler (loueur ou instructeur). Pour simplifier, on suppose que tout agent apte peut être instructeur, qu'aucun agent ne tombe malade et que 8 % des agents aptes quittent la société RACAR à la fin de chaque mois. De plus, la société RACAR s'interdit de licencier ses agents lorsque leur nombre excède les besoins. Un nouvel agent coûte 350E durant son stage de formation. Tout agent apte coûte 600E par mois.

Formulez un problème de programmation linéaire qui détermine pour les six prochains mois le plan d'engagement (et donc de formation) de nouveaux agents, qui respecte les contraintes de besoins de service de location et de taux d'encadrement du service de formation, et qui minimise les coûts salariaux totaux. Notez que l'école de formation est fermée en juin pour réfection des locaux.

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 12

Une compagnie doit répondre (à temps) aux demandes présentées à la table 8.

Chaque trimestre, jusqu'à 27 unités peuvent être produites par les travailleurs réguliers, à un coût de 40E par unité. Durant chaque trimestre, un nombre illimité d'unités peut être produit par une équipe travaillant en heures supplémentaires à un coût de 60E par unité. De toutes les unités produites, il y a 20 % de déchets qui ne peuvent être utilisés pour répondre à la demande. De plus, à la fin de chaque trimestre, 10 % de toutes les unités en stock pourrissent et ne peuvent pas être utilisées pour répondre aux demandes ultérieures. Après que la demande de chaque trimestre a été satisfaite et que les unités périmées ont été retirées, un coût de 15E est encouru pour chaque unité en stock.

Table 8

Trimestre	Demande (unités)
1	30
2	20
3	40
4	35

Formulez un problème de programmation linéaire pour minimiser le coût total de réponse aux demandes des 4 prochains trimestres. Supposez que 20 unités sont disponibles au début du premier trimestre.

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 13

Han Solo réfléchit à la meilleure manière de remplir son Faucon Millenium, vaisseau spacial extrêmement rapide. Lui et son fidèle Chewbacca se sont vu offrir plusieurs cargaisons à transporter en tout ou partie depuis la planète Tatooine jusqu'à la planète Coruscant, la capitale de l'empire.

La première cargaison à transporter est une série de pièces de seconde main pour vaisseau spatial. Cette cargaison, à destination d'un ferrailleur, comprend aussi bien des pièces encore fonctionnelles que des pièces endommagées: le ferrailleur n'est pas très regardant. Han profite d'ailleurs de ce type de cargaisons pour entretenir son vaisseau. Il remplace donc chaque pièce de son Faucon Millenium qui tombe en panne durant le voyage par une pièce de la cargaison. Dix pièces doivent être remplacées en moyenne lors de chaque parsec parcouru. La distance de Tatooine à Coruscant est de 12 parsecs. Chacune de ces pièces pèse en moyenne quatre kilos et a un volume de 0,01 mètre cube. 7500 pièces sont disponibles.

Il est aussi possible a Han de convoyer une partie de la récolte de Owen Skywalker, un cultivateur local. Un kilo de cette récolte occupe 0,001 mètre cube. Cette cargaison est suffisament volumineuse pour remplir plusieurs fois le Faucon Millenium.

Enfin, Jabba le Hut, chef criminel de son état, souhaiterait que Han achemine pour lui quelques caisses d'objets illicites sur coruscant. En premier lieu, il y a cent caisses de bâtons de la mort pour quelques bars mal famés de la capitale de l'empire. Chaque caisse pèse 10 kilos et occupe un volume de 0,1 mètre cube. A côté de cela, cinquante caisses d'armes de contrebande peuvent être acheminées. Elles ont chacune un volume de 0,3 mètres cubes et un poids de 50 kilos.

Le Faucon Millenium dispose de deux cales de 100 mètres cubes chacune (donc 200 mètres cubes au total). Afin qu'il demeure suffisamment rapide, la cargaison totale ne peut dépasser les 80 tonnes. Pour chacune de ces cales, sur les 100 mètres cubes, 5 mètres cubes sont en réalité des sas spéciaux qui, dans le cas d'un fort peu probable contrôle par les troupes de l'empire, peuvent être éventuellement vidés discrètement dans l'espace. On peut y stocker n'importe quoi mais il va de soi que toute la partie "illicite" de la cargaison (les armes et les bâtons de la mort) doit s'y trouver. Pour l'équilibrage du vaisseau, il est bon que le poids total placé dans chaque cale (en ce compris les sas secrets) soit identique.

Han sait que chaque pièce transportée pour le ferrailleur lui rapporte 10 crédits républicains. Le prix de transport pour la récolte est de 2 crédits par kilo. Jabba paie 50 crédits par caisse de bâtons de la mort transportée et 120 pour chaque caisse d'armes. Han se demande quelle(s) cargaison(s) transporter et en quelles quantités pour maximiser ses gains.

Formuler le problème sans le résoudre.

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 14

Gilaïn est un nain de la tribu des Salynïi (qui fait partie du clan de Daïn), spécialisée dans l'exploitation du minerai de soufre. Il a été chargé de déterminer le plan de transformation et de vente du soufre.

Les Salynïi exploitent une mine aux abords des Monts du Fer dont ils extraient le minerai riche en soufre. Ce minerai brut peut trouver acquéreur sur le marché au prix de 10 pièces d'argent la tonne mais il peut aussi être réduit en poudre de soufre qui, elle, sera vendue au prix de 60 pièces d'argent la tonne. Le processus produira simultanément du mercure qui peut être revendu au prix de 500 pièces d'argent la tonne aux magiciens, sorciers ou alchimistes. Le taux de transformation du minerai brut en poudre de soufre est de 30 % et de 2 % pour le mercure. Mais cette même poudre peut aussi être transformée en liquide inflammable ou en poudre noire. Le liquide inflammable, connu dans nos contrées sous le nom de feu grégeois, est obtenu en combinant le soufre avec d'autres matières dont le prix est négligeable et qui se trouvent en abondance. Une tonne de poudre permet la production de 2,5 tonnes de feu grégeois. Celui-ci est vendu au prix de 50 pièces d'argent la tonne. La poudre noire, dont les qualités explosives sont particulièrement reconnues, requiert une qualité de soufre supérieure de sorte que la poudre de soufre classique doit encore être raffinée. Grâce à l'expérience des nains, une tonne de soufre permet la fabrication de 0,95 tonnes de poudre noire. Son prix de vente est de 120 pièces d'argent la tonne. Enfin, certaines peuplades de la Terre du Milieu raffolent de feux d'artifice. Avec une tonne de poudre noire, il est possible de fabriquer 1,5 tonnes de fusées d'artifice dont la valeur est de 300 pièces d'argent la tonne.

Gilaïn doit tenir compte, pour l'extraction de minerai, de la population limitée de nains: malgré leur grande force, ceux-ci ne peuvent extraire plus de 3000 tonnes par mois. En ce qui concerne la vente des produits, les nains sont certains de vendre tout ce qu'ils produisent. La seule contrainte de Gilaïn concerne les contrats que les nains ont passés avec certains de leurs clients:

- Le Gondor leur a demandé 300 tonnes de poudre noire ou de liquide inflammable. Parmi ces 300 tonnes, il est impératif d'avoir au moins 75 tonnes de chaque type (poudre noire et liquide inflammable), le reste est libre.
- Un magicien, Gandalf le Gris, aimerait quant à lui acheter 1,5 tonnes de fusées pour les feux d'artifice.
- Un autre magicien, du nom de Saroumane, souhaite, on ne sait trop pour quoi, 50 tonnes de soufre en poudre.

Il vous est demandé d'aider Gilaïn à présenter ce problème sous la forme d'un programme mathématique.

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 15

Une société de jouets produit des trains, des camions et des voitures, en utilisant 3 machines. Les disponibilités quotidiennes des 3 machines sont 430, 460 et 420 minutes, et les profits par train, camion et voiture sont respectivement EUR 3, EUR 2 et EUR 5. Les temps nécessaires sur chaque machine sont donnes dans le tableau suivant.

Machine	Train	Camion	Voiture
1	1	2	1
2	3	0	2
3	1	4	0

1. Formulez le problème consistant à établir un plan de production optimal comme un programme linéaire.
2. Résoudre ce problème à l'aide de l'algorithme du simplexe.
3. Ecrire le dual de ce problème.
4. Trouver la solution optimale du dual en utilisant les règles de complémentarité.
5. Afin d'augmenter son profit, la société voudrait augmenter le temps de production sur une machine. Pour quelle machine investiriez-vous en main d'oeuvre supplémentaire et à quel prix horaire maximum ?

Solution :

Programme linéaire

Simplex

Exercice 16 Écrire le dual des exercices: 1, 2, 3, 4 et 10. Résoudre le dual des exercices: 1, 2, 3 et 4.