INFO-F-310 Algorithmique III:
Chp4. Problème de transport & Flot de coût minimum

Nikita Veshchikov

Objectifs :
– Résolution de problèmes de transport.
– Résolution de problèmes de flot de coût minimum.

Exercice 1

Trois centrales électriques avec une capacité respectivement de 25, 40 et 30 millions de kWh fournissent l'électricité de trois villes. La demande maximale de chacune des trois villes est respectivement estimée à 30, 35 et 25 millions de kWh. Le prix du million de kWh dans les trois villes est donné dans la table ci-dessous.

		Villes		
		1	2	3
	1	\$600	\$700	\$400
Usines	2	\$320	\$300	\$350
	3	\$500	\$480	\$450

– Formuler le problème comme un modèle de transport.
– Déterminer la solution optimale.

Solution :

	$Ville_1$	$Ville_2$	$Ville_3$	Offre
$Centrale_1$	600	700	400	25
$Centrale_2$	320	300	350	40
$Centrale_3$	500	480	450	30
Demande	30	35	25	

Solution admissible (Coin Nord-Ouest) + variables duales :

	$Ville_1$ 600	$Ville_2$ 580	$Ville_3$ 550	$Ville_i$ 100	Offre
$Centrale_1$	600	700	400	0	
0	25				25
$Centrale_2$	320	300	350	0	
-280	5	35			40
$Centrale_3$	500	480	450	0	
-100		0	25	5	30
Demande	30	35	25	5	

Variable entrante :

	$Ville_1$	600	$Ville_2$	580	$Ville_3$	550	$Ville_i$	100	Offre
$Centrale_1$	600		700		400		0		
0	25			-120		150		100	25
$Centrale_2$	320		300		350		0		
-280	5		35			-80		-180	40
$Centrale_3$	500		480		450		0		
-100		0	0		25		5		30
Demande	30		35		25		5		

$\rightarrow$ variable entrante :
$Max\{-120, 150, 100, -80, -180, 0\} = 150$
Variable sortante :

	$Ville_1$	600	$Ville_2$	580	$Ville_3$	550	$Ville_i$	100	Offre
$Centrale_1$	600		700		400		0		
0	25$-\theta$			-120	$+\theta$	150		100	25
$Centrale_2$	320		300		350		0		
-280	5$+\theta$		35$-\theta$			-80		-180	40
$Centrale_3$	500		480		450		0		
-100		0	0$+\theta$		25$-\theta$		5		30
Demande	30		35		25		5		

$\theta = Min\{25, 35, 25\} = 25$

	$Ville_1$	600	$Ville_2$	580	$Ville_3$	400	$Ville_i$	100	Offre
$Centrale_1$	600		700		400		0		
0	0			-120	25			100	25
$Centrale_2$	320		300		350		0		
-280	30		10			-230		-180	40
$Centrale_3$	500		480		450		0		
-100		0	25		0		5		30
Demande	30		35		25		5		

$\rightarrow$ variable entrante :
$Max\{-120, 100, -230, -180, 0, -150\} = 100$

	$Ville_1$	600	$Ville_2$	580	$Ville_3$	400	$Ville_i$	100	Offre
$Centrale_1$	600		700		400		0		
0	0$-\theta$			-120	25		$+\theta$	100	25
$Centrale_2$	320		300		350		0		
-280	30$+\theta$		10$-\theta$			-230		-180	40
$Centrale_3$	500		480		450		0		
-100		0	25$+\theta$			-150	5$-\theta$		30
Demande	30		35		25		5		

$\theta = Min\{0, 5, 10\} = 0$

	$Ville_1$	500	$Ville_2$	480	$Ville_3$	400	$Ville_i$	0	Offre
$Centrale_1$	600		700		400		0		
0		-100		-220	25		0		25
$Centrale_2$	320		300		350		0		
-180	30		10			-130		-180	40
$Centrale_3$	500		480		450		0		
0		0	25			-50	5		30
Demande	30		35		25		5		

$\{-100, -220, -130, -180, 0, -50\} \leq 0 \Rightarrow STOP$
Quantités à transporter :

	$Ville_1$	$Ville_2$	$Ville_3$	Offre
$Centrale_1$			25	25
$Centrale_2$	30	10		40
$Centrale_3$		25		30
Demande	30	35	25	

Exercice 2

Dans le problème de transport non équilibré présenté dans le tableau ci-dessous, si une unité d'une source n'est pas acheminée à une ville, elle doit être stockée au prix de \$5, \$4 et \$3 selon la source.

\$1	\$2	\$1	**20**
\$3	\$4	\$5	**40**
\$2	\$3	\$3	**30**
30	**20**	**20**	

– Déterminer la solution optimale.

Solution :

Offre = 20 + 40 + 30 = 90
Demande = 30 + 20 + 20 = 70
Demande($Ville_i$) = 90-70 = 20
Ce qui va être acheminée vers la ville i doit être stocké, donc le prix de transport vers la ville i est égal au prix de stockage.

	$Ville_1$	$Ville_2$	$Ville_3$	$Ville_i$	Offre
$Source_1$	1	2	1	5	20
$Source_2$	3	4	5	4	40
$Source_3$	2	3	3	3	30
Demande	30	20	20	20	

Exercice 3 Soit le problème de transport deux usines fournissent trois magasins avec un certain bien. Le nombre d'unités en réserve dans les usines est de 200 et de 300. Les demandes dans les magasins sont de 100, 200 et 50. Les unités peuvent transiter aussi bien par les usines que par les magasins avant d'atteindre leur destination finale. L'ensemble des coûts sont repris dans la table ci-dessous. Formuler le problème.

		Usine 1	Usine 2	Magasin 1	Magasin 2	Magasin 3
Usine	1	\$0	\$6	\$7	\$8	\$9
	2	\$6	\$0	\$5	\$4	\$3
Magasin	1	\$7	\$2	\$0	\$5	\$1
	2	\$1	\$5	\$1	\$0	\$4
	3	\$8	\$9	\$7	\$6	\$0

Solution :
buffer = 100+200+50 = 350
Demande($Usine_1$) = demande orig. + buffer = 200 + 350 = 550
Demande($Usine_2$) = demande orig. + buffer = 300 + 350 = 550
Ici tous les magasins sont reliés, donc :
Offre($Magasin_i$) = buffer = 350

	$Usine_1$	$Usine_2$	$Magasin_1$	$Magasin_2$	$Magasin_3$	Offre
$Usine_1$	0	6	7	8	9	200
$Usine_2$	6	0	5	4	3	300
$Magasin_1$	7	2	0	5	1	350
$Magasin_2$	1	5	1	0	4	350
$Magasin_3$	8	9	7	6	0	300
Demande	550	650	100	200	50	

Offre = 200 + 300 + 350 + 350 + 350 = 1550.
Demande = 550 + 650 + 100 + 200 + 50 = 1550.
Offre = Demande ⇒ OK.
Pour trouver la solution il faut encore appliquer l'algo utilisé dans l'exercice 1.

Exercice 4 Trouver le flot de coût minimum dans le réseau suivant. Les sources sont s_1 et s_2 avec un stock de 15 chacun ; les puits sont t_1, t_2, t_3, ses demandes sont 5, 8, 10 respectivement. Le coût pour unité de flot p et la capacité c est marqué sur chaque arc comme (p, c).