

Corrigés de la séance 11

Chap 11-12-13: les fluides, les ondes et le son

Questions pour réfléchir: les ondes et le son

2 p.522 En décembre 1916, un désastre majeur est survenu dans les Alpes à un contingent de l'armée autrichienne. A peine avaient-ils commencé un tir de barrage au canon, qu'une avalanche de neige se déclencha, ensevelissant des milliers de soldats. Quelles propriétés du son peut-on déduire de cet événement?

Le son est le résultat d'une vibration qui se propage dans un milieu; un son très fort, tel celui d'un coup de canon, provoque des vibrations de grande amplitude qui se transmettent à la couche de neige et la décolle de la paroi, provoquant l'avalanche.

Exercices: les ondes et le son

42 p.391 L'allongement x par rapport à la longueur au repos $l_0 = 10,0$ cm est lié à la force agissant sur le ressort par la loi de Hooke : $F = kx$. Avec $x = 4,0 \times 10^{-3}$ m et $F = 40,0$ N, on obtient $k = 1,00 \times 10^3$ N/m.

Le travail W nécessaire pour allonger le ressort de 14,0 cm à 18,0 cm est égal à

$$W = \int_{4 \times 10^{-2}}^{8 \times 10^{-2}} kx \, dx = \left. \frac{kx^2}{2} \right|_{4 \times 10^{-2}}^{8 \times 10^{-2}} = 500 \times (64 - 16) \times 10^{-4} \text{ J} = 2,40 \text{ J}.$$

43 p.391 Un ressort hélicoïdal a une longueur de 55 cm s'il porte une charge de 100 N et une longueur de 57 cm s'il porte une charge de 110 N. Quelle est la constante d'élasticité de ce ressort ?

Dans les deux situations, le ressort est soumis à une force et est donc allongé par

rapport à sa longueur au repos l_0 . On sait :

$$l_0 + x_1 = 0,55 \text{ m} \longleftrightarrow F_1 = kx_1 = 100 \text{ N}$$

$$l_0 + x_2 = 0,57 \text{ m} \longleftrightarrow F_2 = kx_2 = 110 \text{ N}$$

$$\text{donc } k(x_1 - x_2) = F_2 - F_1, \quad \text{soit } k = 500 \text{ N/m.}$$

61 p.391 La vitesse des ondes de compression dans l'eau pure est de 1498 m/s . Quelle est la longueur d'onde d'un son de 440 Hz dans l'eau ?

La longueur d'onde λ est reliée à la vitesse v et à la fréquence f par la relation $\lambda = v/f$. Dès lors $\lambda = 1498/440 \text{ m} = 3,40 \text{ m}$.

(67) p.485 La corde d'un violon a une masse linéique de $59 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$ et une tension de 10 N . Quelle sera la vitesse des ondes transversales sur cette corde ?

La vitesse des ondes transversales sur la corde est égale à

$$v = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}} = \sqrt{\frac{10}{0,59}} \text{ m/s} = 13 \text{ m/s.}$$

74 p.485 On définit le nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda$, où λ est la longueur d'onde. Montrer qu'une onde sinusoïdale, qui se propage dans le sens des x positifs avec une vitesse c , peut être écrite sous la forme $\psi = A \sin[k(x - ct)]$. Montrer qu'elle peut aussi être écrite sous la forme $\psi = A \sin(kx - \omega t)$.

L'équation (12.19) p.470 donne l'expression d'une onde sinusoïdale se déplaçant dans le sens positif des x :

$$y(x, t) = A \sin \frac{2\pi}{\lambda} (x - ct).$$

Or $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, donc $kc = \frac{2\pi}{\lambda} c = 2\pi f = \omega$. D'où

$$y(x, t) = A \sin(kx - \omega t).$$

1 p.525 En musique, la note étalon la_3 a une fréquence de 440 Hz . Quelles sont la période et la longueur d'onde correspondantes à la température ambiante (la vitesse du son dans l'air est de 340 m/s) ?

La période $T = \frac{1}{f} = \frac{1}{440 \text{ Hz}} = 2,27 \times 10^{-3} \text{ s}$. Dans l'air, la vitesse de propagation des ondes est $v \simeq 340 \text{ m/s}$, d'où la longueur d'onde $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{440} = 0,77 \text{ m}$.

7 p.525 Une source sonore ponctuelle émet une onde de puissance 50 W dans un milieu homogène. Déterminer l'intensité du rayonnement sonore à 10 m de la source. Quelle est l'énergie reçue, en une seconde, par un petit détecteur de $1,0 \text{ cm}^2$ de surface tenu perpendiculairement à la direction de l'onde à 10 m de la source ? On négligera les pertes.

Par définition, l'intensité I est égale à la puissance P par unité de surface S soit $I = \frac{P}{S} = \frac{50}{4\pi \cdot 10^2} \text{ Wm}^{-2} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ Wm}^{-2}$. L'énergie reçue par un détecteur de surface S_d pendant le temps Δt est : $E = I \times S_d \times \Delta t = 4 \cdot 10^{-2} \times 10^{-4} \times 1 \text{ J} = 4 \times 10^{-6} \text{ J}$.

12 p.525 L'une des caractéristiques acoustiques les plus importantes d'une pièce est son temps de réverbération. C'est le temps que met le son pour diminuer de 60 dB . Qu'est-ce que cela signifie en termes d'intensité sonore ? Dans une salle de concert, le temps de réverbération est en général de 1 à 3 s .

Pour une variation d'intensité de I_1 à I_2 , le niveau sonore varie de $\Delta\beta = 10 \log_{10} \frac{I_2}{I_1} (\text{dB})$.

On en conclut que $\frac{I_2}{I_1} = 10^{-6}$.

26 p.526 On considère une tige d'un alliage d'aluminium de longueur 10 m , de section $1,0 \text{ cm}^2$, de masse $2,7 \text{ kg}$ et de module de Young $E = 7,0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$. On frappe sur son extrémité avec une fréquence de 100 Hz . Combien de temps faut-il pour que le signal sonore atteigne l'autre extrémité de la tige, sachant que la vitesse de propagation $v = (E/\rho)^{1/2}$? Quelle sera la longueur d'onde ?

La densité de la tige est donnée par

$$\rho = \frac{m}{Sl} = \frac{2,7}{10 \times 10^{-4}} \text{ kg/m}^{-3} = 2,7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

La vitesse de l'onde vaut donc

$$v = \left(\frac{E}{\rho} \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{7 \times 10^{10}}{2,7 \times 10^3}} \text{ m/s} = 5,1 \times 10^3 \text{ m/s}.$$

L'onde sonore atteindra finalement l'extrémité de la tige au temps

$$t = \frac{l}{v} = \frac{10}{5,1 \times 10^3} \text{ s} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ s},$$

et la longueur d'onde est de $\lambda = vT = \frac{v}{f} = \frac{5,1 \times 10^3}{100} \text{ m} = 51 \text{ m}$.

32 p.526 Le niveau sonore d'un grand moteur est de 130 dB à une distance de 10,0 m. Quelle est l'intensité sonore à 100 m du moteur ?

Le rapport des intensités sonores est donnée par

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{100^2}{10^2} = 100.$$

La diminution d'intensité sonore entre une source à 100 m et à 10 m est donc

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_1}{I_2} = 10 \log 100 = +20 \text{ dB}.$$

On passe donc de 130 à 110 dB.

36 p.526 Dans une pièce, le bruit provenant d'un aspirateur est de 80,0 dB. Une personne règle un poste de radio à 65,0 dB. Quel est alors le niveau d'intensité dans cette pièce ?

Nous avons deux sources dont les intensités sont :

- source 1 : $\beta_1 = 10 \log \frac{I_1}{I_0} = 80 \text{ dB} \rightarrow \frac{I_1}{I_0} = 10^8$
- source 2 : $\beta_2 = 10 \log \frac{I_2}{I_0} = 65 \text{ dB} \rightarrow \frac{I_2}{I_0} = 10^{6,5}$

où I_0 est une intensité de référence arbitraire. L'intensité sonore totale est la somme des intensités, donc

$$I_{tot} = \frac{I_1 + I_2}{I_0} = 10^8 + 10^{6,5}.$$

En decibels, on obtient $\beta_{tot} = 10 \log \frac{I_1 + I_2}{I_0} = 10 \log(10^8 + 10^{6,5}) = 80,1 \text{ dB}$. Si le volume total doublait, on aurait seulement une augmentation de 3 dB.

44 p.527 Deux ondes sonores de pulsations 900,0 rad/s et 896,0 rad/s se superposent. Quelle est la fréquence des battements résultants ?

Quand 2 ondes de fréquence f_1 et f_2 se superposent, la fréquence des battements résultants est $f = |f_1 - f_2|$ soit $f = \frac{900 - 896}{2\pi} = 0,6366 \text{ Hz}$.

48 p.526 Un fil est tendu entre deux points distants de 50 cm. Quelles sont les longueurs d'ondes du mode fondamental et du second mode harmonique ?

Pour un fil de longueur L fixé à ses deux extrémités, le mode fondamental ($N = 1$) comporte un seul ventre au milieu du fil, et la longueur d'onde est $\lambda_1 = 2L$. Pour le mode $N = 2$, $L = \frac{1}{2} \times 2 \times \lambda_2$. Pour $L = 0,5$ m on trouve $\lambda_1 = 1$ m et $\lambda_2 = 0,5$ m.

75 p.528 Une tige de cuivre de longueur 1,00 m est fortement fixée en son milieu et mise à vibrer transversalement. Sachant que $v = (E/\rho)^{1/2}$, sa masse volumique est $8,9 \times 10^3$ kg/m³ et son module de Young est 11×10^{11} N/m², quelle est sa fréquence ?

La tige étant fixée en son centre, on a 1 noeud et 2 ventres pour le mode fondamental, soit $L = \lambda/2$, soit $\lambda = 2L = 2,0$ m. La vitesse de l'onde est égale à $v = \left(\frac{E}{\rho}\right)^{1/2} = 3516$ m/s. La fréquence de vibration est donc égale à $f = \frac{v}{\lambda} = 1,8$ Hz.

74 p.528 Deux petits haut-parleurs distants de 3,00 m émettent un son de fréquence constante 344 Hz (voir figure). On déplace un microphone le long d'une droite parallèle à la ligne S_1S_2 joignant les deux haut-parleurs et située à 4,00 m de cette ligne. On trouve deux maxima d'intensité: le premier au point O équidistant des deux haut-parleurs, et le second juste en face de l'un des haut-parleurs. Utilisant ces données, calculez la vitesse du son. [Suggestion : les ondes doivent arriver en phase pour qu'elles produisent un maximum d'interférence].

La vitesse du son est donnée par $v = \lambda f$. On connaît la fréquence du son. Il reste à calculer λ . Pour avoir une interférence constructive maximum en P_b , il faut que les sons des deux sources S_1 et S_2 soient en phase. Les amplitudes des deux sons en P_b sont égales à

$$y_1(P_b) = A \sin(\omega t + \phi_1)$$

$$y_2(P_b) = A \sin(\omega t + \phi_2)$$

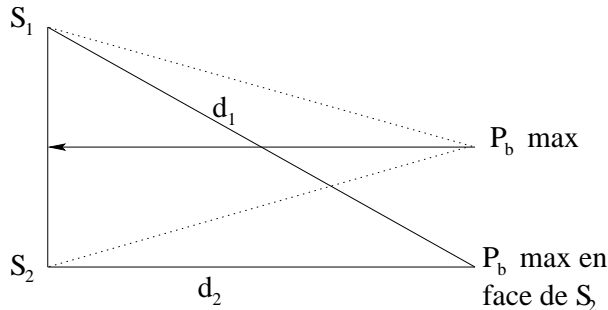
où ϕ_i est le déphasage du son entre la source i et le point P_b . La condition pour que les ondes soient en phase s'écrit donc

$$|\phi_2 - \phi_1| = 2N\pi, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

Le premier maximum a lieu lorsque $N = 0$, soit $\phi_2 = \phi_1$. Le second maximum a lieu lorsque $N = 1$, soit $|\phi_2 - \phi_1| = 2\pi$. D'autre part, le déphasage entre la source et un point situé à une distance d de la source est égal à $\phi = 2\pi \frac{d}{\lambda} = kd$. Donc:

$$|\phi_2 - \phi_1| = k(d_2 - d_1) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_1 - d_2) = 2\pi.$$

Dès lors, $d_2 - d_1 = \lambda = (\sqrt{3^2 + 4^2} - 4) \text{ m} = 1 \text{ m}$. On trouve $v = \lambda f = 344 \text{ m/s}$.



QUESTION DE L'EXAMEN D'AOÛT 2006

L'extrémité de chaque pointe d'un diapason qui vibre à une fréquence de 264 Hz se déplace de 1,5 mm de part et d'autre de sa position de repos. Calculez:

- la vitesse maximale;
- l'accélération maximale de l'extrémité de chacune des pointes du diapason.

Il s'agit d'un mouvement d'oscillation harmonique, d'équation

$$x(t) = A \cos \omega t, \quad \text{où } A = x_{max} = 1,5 \text{ mm} = 1,5 \cdot 10^{-3} \text{ m},$$

et la pulsation $\omega = 2\pi\nu = 2\pi \cdot 264 \text{ s}^{-1} = 1660 \text{ rad/s}$. En dérivant on trouve les expressions de la vitesse et de l'accélération:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = -A\omega \sin \omega t \Rightarrow v_{max} = A\omega = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1660 \text{ m/s} = 2,5 \text{ m/s}.$$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = -A\omega^2 \cos \omega t \Rightarrow a_{max} = A\omega^2 = 1,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1660^2 \text{ m/s}^2 = 4,1 \cdot 10^3 \text{ m/s}^2.$$

QUESTION DE L'EXAMEN DE JANVIER 2007

Deux cordes fabriquées dans la même matière sont attachées l'une à l'autre; la deuxième a un diamètre double de celui de la première. L'extrémité libre de la première corde est soumise à un mouvement d'oscillation transverse dont la période est de 1,0 s. L'onde qui se forme dans cette corde a une longueur de 1,0 m. Quelle est la longueur de l'onde qui se forme dans la deuxième corde ?

Vitesse dans la première corde:

$$V_1 = \lambda_1 \nu_1 = \lambda_1 / T_1 = 1 \text{ m/s} = \sqrt{F_{T1} / \mu_1},$$

où F_{T1} est la tension dans la corde 1 et μ_1 est sa masse linéique. Les tensions dans les deux cordes sont égales, sinon elles se déplaceraient globalement (la résultante serait non-nulle): $F_{T1} = F_{T2}$. La masse linéique de la corde 2 est 4 fois plus grande que celle de la corde 1, car le rayon est double: $\mu_2 = 4\mu_1$. Dans la deuxième corde on a donc:

$$V_2 = \sqrt{F_{T2} / \mu_2} = \sqrt{F_{T1} / 4\mu_1} = V_1 / 2;$$

et comme les deux cordes oscillent à la même fréquence, qui est celle du noeud qui les lie $\nu_2 = \nu_1$, donc

$$V_2 = \lambda_2 \nu_2 = \lambda_2 \nu_1 = V_1 / 2 = (\lambda_1 \nu_1) / 2;$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 / 2 = 0,50 \text{ m.}$$

Questions pour réfléchir: les fluides

7. p.434 Supposons que vous soyez sur un radeau flottant sur la surface d'un grand bassin rempli d'eau. À bord, vous avez une tasse, un buste en pin d'un scientifique célèbre, une banane et une poule. Qu'arrive-t-il au niveau de l'eau dans le bassin si: (a) vous vous inclinez, remplissez une tasse d'eau et la buvez ? (b) vous lancez le buste à l'eau ? (c) vous mangez la banane ? (d) la poule s'envole ?

Comme le radeau flotte, le volume submergé (dont il est enfoncé) est égal au volume d'eau ayant le même poids que le radeau lui-même et ce qu'il porte.

- a) Le volume d'eau dans le lac a diminué du volume de la tasse. Le poids supplémentaire porté par le radeau (celui de la tasse d'eau) provoque un enfoncement supplémentaire égal à un volume d'eau de même poids, c'est-à-dire le volume de la tasse. Donc, pas de changement.
- b) Dans le radeau, le buste impose un enfoncement correspondant à un volume d'eau de même poids que le buste. Le buste en train de flotter occupe dans l'eau le même volume. Donc, pas de changement.
- c) La banane dans votre estomac ou dans le radeau possède le même poids et induit le même enfoncement du radeau. Donc, pas de changement.
- d) La poule ne contribue plus au poids du radeau qui doit donc s'enfoncer moins pour compenser le poids des occupants. Donc le niveau global de l'eau baisse.

14. p.435 On sait que l'alcool et l'acétone réduisent la tension superficielle de l'eau. Faites flotter deux allumettes en bois, parallèles et séparées d'environ 2 cm, sur la surface d'un bol d'eau. Que pensez-vous qu'il arrive si vous versez très doucement une goutte d'eau entre les allumettes ? Et si vous versez une goutte d'acétone ou d'alcool ?

- a) Les allumettes flottent et l'eau versée en supplément se répand en s'étalant sur la surface. Elle induit donc une force qui tend à séparer les allumettes. Si on verse suffisamment lentement, cette force est négligeable et les allumettes ne bougent pas.
- b) La tension superficielle diminue dans la zone située entre les allumettes. Celles-ci subissent une tension différente sur leurs 2 côtés, et donc une force nette qui tend à les rapprocher.

Exercices: les fluides

1. [I] p.438 Une piscine large de 5 m et longue de 10 m de longueur, est remplie d'eau sur une hauteur de 3 m. Quelle est la pression au fond de la piscine, la pression atmosphérique étant égale à p_{atm} ?

La pression sur le fond de la piscine est égale à la pression atmosphérique plus la pression due au poids de l'eau. Cette dernière est égale au poids d'une colonne dont la surface de base est unitaire, donc

$$P_{fond} = P_{atm} + P_{eau} = 3.10^4 \text{ Pa} + 3 \text{ m} \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times g = 13.10^4 \text{ Pa}.$$

17. [I] p.439 La figure P17 montre un fil plié en U et fermé par une tige mobile de longueur $L = 0,10 \text{ m}$. On le plonge dans la glycérine dont il se forme un film à l'intérieur du rectangle. Quelle est la force requise pour tirer la tige mobile à une vitesse constante, augmentant de ce fait l'aire de la couche ? La tension de surface glycérine-air est de 63.10^{-3} N/m .

La force qui s'exerce sur la partie mobile est donnée par $F_t = 2\gamma L$, où L est la longueur étirée. Le facteur 2 vient du fait que le film de glycérine a 2 surfaces (dessus et dessous). On a donc

$$F_t = 2 \times 63.10^{-3} \times 0,10 \text{ N} = 13.10^{-3} \text{ N}.$$

(3.) [I] p.438 Un réservoir d'oxygène a une pression manométrique égale à 5,00 fois la pression atmosphérique. Quelle est la force (grandeur et direction) exercée sur chaque centimètre carré de la paroi du réservoir ?

La force est donnée par le produit de la différence de pression entre les deux faces par la surface. Comme la pression manométrique est par définition l'excédent de pression par rapport à la pression atmosphérique, on a

$$F = 5 \text{ atm} \times 101,3 \cdot 10^3 \text{ Pa/atm} \times 10^{-4} \text{ m}^2 = 50,7 \text{ N}.$$

27. [II] p.439 Sachant que la plupart des gens ne peuvent pas aspirer de l'eau avec une paille plus haut qu'environ 1,1 m, quelle est la plus basse pression qu'ils peuvent créer dans leurs poumons ?

La dépression doit correspondre au poids d'une colonne de 1,1 mètre d'eau et donc $1,1 \text{ m} \times 10^3 \text{ kg/m}^3 \times g = 1,1 \cdot 10^4 \text{ Pa}$.

37. [II] p.440 Un sous-marin est immobile sous 20,0 m d'eau. Avec quelle force un plongeur doit-il agir contre la pression de la mer pour ouvrir une écoutille de dimensions $1,0 \text{ m} \times 0,5 \text{ m}$, en supposant que la pression dans le sous-marin est 90% de la pression atmosphérique ?

Pour ouvrir l'écoutille il faut fournir une force égale à la somme des forces de pression qui s'exercent sur elle:

$$\begin{aligned} F &= (P_{atm} - 0,90 \cdot P_{atm} + \rho_{eau}gh) \times S \\ &= ((101 - 90) \cdot 10^3 \text{ Pa} + 10^3 \text{ kg/m}^3 \times g \times 20,0 \text{ m}) \times 0,5 \text{ m}^2 \\ &= 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}. \end{aligned}$$

(42.) [II] p.440 Le tube en U ouvert de la figure P42 contenait de l'eau avant qu'on ne verse un liquide moins dense dans la colonne de droite. Montrer que la masse volumique ρ_x du liquide est donné par l'expression $\rho_x = \rho_e h_e / h_x$.

Si on prend comme niveau de référence le niveau inférieur du liquide inconnu, on peut écrire pour les branches de gauche (1) et de droite (2): $P_1 = P_2$.
Or $P_1 = P_{atm} + \rho_e g h_e$ et $P_2 = P_{atm} + \rho_x g h_x$, d'où la relation cherchée.

62. [I] p.442 Un tube est employé comme syphon pour vider un réservoir d'eau. À un moment donné, l'ouverture basse du syphon est 20 cm sous le niveau du liquide dans le réservoir. Quelle est la vitesse d'écoulement de l'eau?

Nous nous trouvons dans les conditions d'application du théorème de Torricelli (lui-même conséquence du théorème de Bernoulli). En négligeant la vitesse à

laquelle le niveau d'eau baisse dans le réservoir, on a pour vitesse d'écoulement

$$v_{ec} = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 10 \times 0,2} \text{ m/s} = 2 \text{ m/s}.$$

(56.) [I] p.442 Un tuyau de 5,0 cm de diamètre transporte de l'essence de masse volumique $0,68 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ à une vitesse de 2,5 m/s. Calculer le débit massique, en supposant que le liquide est parfait (pas de viscosité).

Le débit massique Φ est la masse qui traverse une surface donnée par unité de temps. La masse d'essence qui traverse la surface par seconde est contenue dans un cylindre dont la section est celle du tuyau ($\frac{\pi d^2}{4}$, d est le diamètre) et de longueur correspondant à la distance parcourue par seconde (ici 2,5 m). La masse dans ce cylindre est la masse volumique fois ce volume. Le débit massique est donc

$$\Phi = 0,68 \times \frac{\pi}{4} \times (5 \cdot 10^{-2})^2 \times 2,5 \text{ kg/s} = 3,3 \text{ kg/s}.$$

69. [II] p.442 Le tube de Venturi de la figure P69 est inséré dans un oléoduc pour déterminer le débit et la vitesse d'écoulement. Les deux colonnes, insérées avant et dans l'étranglement du tube, servent de manomètres. Exprimer la vitesse d'écoulement dans l'oléoduc en fonction de Δy , différence des hauteurs du liquide dans les deux colonnes, et des sections avant et dans l'étranglement.

Le débit massique est le même dans tout le tube. Si le fluide est incompressible, nous devons avoir que $S_0 v_0 = S_e v_e$ où v_0 et v_e désignent les vitesses respectives d'écoulement à l'endroit des sections S_0 et S_e . Le théorème de Bernoulli, appliqué au centre des sections (même hauteur) donne:

$$P_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 = P_e + \frac{1}{2} \rho v_e^2.$$

Les colonnes d'eau mesurent la pression à l'endroit des sections S_0 et S_e , donc

$$P_0 - P_e = \rho g \Delta y = \frac{1}{2} \rho (v_e^2 - v_0^2).$$

En remplaçant v_e par sa valeur tirée de la conservation des débits $v_e = \frac{S_0}{S_e} v_0$, on a:

$$g \Delta y = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{S_0}{S_e} \right)^2 - 1 \right] v_0^2$$

et donc

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g \Delta y}{\left(\frac{S_0}{S_e} \right)^2 - 1}}.$$

77. [cc] p.443 Reformulez le théorème de Torricelli pour un réservoir ouvert de superficie S_1 , contenant un liquide qui coule avec une vitesse v_2 d'un orifice d'aire S_2 situé à une profondeur h au-dessous de la surface du liquide. Montrer que

$$v_2 = \sqrt{\frac{2ghS_1^2}{(S_1^2 - S_2^2)}}, \quad \frac{dh}{dt} = v_1 = \sqrt{\frac{2ghS_2^2}{(S_1^2 - S_2^2)}}.$$

Si on compare les situations entre un point 1 à la surface du réservoir (sur S_1) et un point 2 à la sortie, on peut appliquer le théorème de Bernoulli, avec P_1 et P_2 valant tous deux la pression atmosphérique. Dès lors:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho gh + \frac{1}{2}\rho v_1^2.$$

On obtient les relations recherchées avec la conservation des débits $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

81. [III] p.443 La figure P81 montre un jet de liquide jaillissant d'un tube monté à la base d'un réservoir ouvert. Appliquer l'équation de Bernoulli entre les points 2 et 3 pour obtenir une expression de y en fonction de θ et de h . Est-ce que y peut dépasser h ?

La même pression (pression atmosphérique) s'exerce sur le liquide aux points 1, 2 et 3 (se rappeler que la pression ne dépend pas de la direction). On a donc par le théorème de Bernoulli:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho gy + \frac{1}{2}\rho v_3^2.$$

Pour les composantes horizontales x , on a $v_{2x} = v_{3x}$, car on néglige les frottements de l'air et la pesanteur agit verticalement. Pour les composantes verticales, on a $v_{2y} = v_2 \sin \theta$ et $v_{3y} = 0$. On a donc

$$\rho gy = \frac{1}{2}\rho v_{2y}^2 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 \sin^2 \theta.$$

Le théorème de Bernoulli entre les points 1 et 2 donne (en négligeant v_1):

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho gh.$$

Par conséquent, $y = h \sin^2 \theta$ et $y \leq h$.

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOÛT 2005

Dans une écluse, l'eau du compartiment central s'élève à une hauteur de 3,0 m au-dessus du niveau du bassin inférieur. A l'approche d'un bateau venant de l'aval, on amène le niveau de l'eau du compartiment central à celui du bassin inférieur. A cet effet, on ouvre une canalisation qui débouche à 1,0 m sous le niveau de l'eau du bassin inférieur. A quelle vitesse l'eau jaillit-elle de la canalisation (au début de l'opération) ?

D'après le théorème de Bernoulli, $P + \rho gy + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{constante}$. Prenons $y = 0$ au débouché de la canalisation (1 m sous le niveau du bassin inférieur). Notons H le niveau de l'eau dans le compartiment central. Alors en appliquant Bernoulli on a, pour le compartiment central et pour le bassin inférieur:

$$P_{atm} + \rho gH + 0 = P_{atm} + \rho gh + \frac{1}{2}\rho v^2,$$

où $h = 1$ m est la hauteur d'eau dans le bassin inférieur par rapport à notre niveau de référence. On trouve donc:

$$\frac{1}{2}v^2 = g(H - h) \Rightarrow v = \sqrt{2g(H - h)} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 2,0} \text{ m/s} = 7,7 \text{ m/s}.$$

QUESTION DE L'EXAMEN DE JUIN 2006

Un tuyau horizontal de section circulaire de 6,0 cm de diamètre se rétrécit progressivement jusqu'à 4,0 cm. Lorsque l'eau s'écoule dans ce tuyau à une certaine vitesse, la pression manométrique aux deux sections est respectivement 32 kPa et 24 kPa. Déterminez le débit massique dans le tuyau. On considère que la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m³.

Théorème de Bernoulli ($y_1 = y_2 = 0$):

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad \Rightarrow \quad P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2).$$

Équation de continuité:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2.$$

Donc:

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho \left(1 - \frac{S_2^2}{S_1^2}\right) v_2^2$$

$$8 \text{ kPa} = \frac{1}{2} \cdot 1000 \cdot \left(1 - \frac{0,04^2}{0,06^2}\right) v_2^2 \quad \Rightarrow v_2 = 5,4 \text{ m/s.}$$

Le débit massique vaut donc

$$\Phi = \rho S_2 v_2 = 1000 \cdot \pi \cdot 0,02^2 \cdot 5,4 = 6,7 \text{ kg/s.}$$

QUESTION DE L'EXAMEN D'AOÛT 2006

Une bulle d'air de 5,00 mm de diamètre est émise au fond d'un étang. Arrivée à la surface, son diamètre est de 6,50 mm. Quelle est la profondeur de l'étang, sachant que la pression atmosphérique est de $1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$? On considère que la masse volumique de l'eau est de 1000 kg/m^3 et que la température de l'eau est constante.

Le volume de la bulle est multiplié par $(6,50/5,00)^3 = 2,20$. Par la relation $P \cdot V = \text{cste}$ qui s'applique à température constante, la pression au fond de l'étang est donc 2,20 fois la pression atmosphérique. La surpression P_{eau} exercée au fond de l'étang par l'eau seule est donc 1,20 fois la pression atmosphérique. La profondeur de l'étang est donc donnée par $P_{eau} = \rho g h$, où ρ est la masse volumique de l'eau. Donc:

$$h = \frac{P_{eau}}{\rho g} = \frac{1,20 \cdot P_{atm}}{\rho g} = \frac{1,20 \cdot 1,0125 \cdot 10^5 \text{ Pa}}{1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \cdot 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}} = 12,1 \text{ m.}$$